AUFGABENBEISPIELE MIT ERWARTUNGSHORIZONT

FÜR DIE FACHHOCHSCHULREIFEPRÜFUNG

IM FACH MATHEMATIK

Aufgabe 1: Produktlebenszyklus eines Kaminofens

Die Firma Jutor, ein skandinavischer Hersteller von Holz-Kaminöfen, brachte Ende des Jahres 2000 neue Öfen mit der Produktbezeichnung SCAN auch auf den deutschen Markt.

Die Absatzzahlen in Deutschland änderten sich im Zeitablauf wie folgt: Im Jahre 2002, d. h. zwei Jahre nach Markteinführung, betrug der Absatz 154 Stück. Im Jahre 2004 konnte das Unternehmen den größten Anstieg seiner Absatzzahlen verzeichnen. Im Jahre 2005 betrug der Absatz 430 Stück. Natürlich wurde im Jahr 2000 noch kein Holzofen verkauft. Bisher wurde der Verkaufspreis in Höhe von 800 € annähernd konstant gehalten.

© Steffi Pelz/PIXELIO
www.pixelio.de

a) Stellen Sie eine ganzrationale Funktionsgleichung dritten Grades auf, die den Jahresabsatz von Holzöfen SCAN in Deutschland im Zeitablauf beschreibt. Dabei steht die Variable t für die Jahre seit der Markteinführung, f(t) für den jährlichen Absatz. (Kontrollergebnis: $\mathrm{f(t)} = -0{,}6\mathrm{t}^3 + 7{,}2\mathrm{t}^2 + 65\mathrm{t}$)

b) Skizzieren Sie den Graph im vorbereiteten Koordinatensystem und ermitteln Sie den Definitionsbereich, innerhalb dessen die Funktion den Produktlebenszyklus der Kaminöfen sinnvoll beschreibt. Führen Sie die notwendigen Rechnungen durch. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise auch.

c) Berechnen Sie, wie viele Kaminöfen während des Produktlebenszyklus **durchschnittlich jährlich** in Deutschland abgesetzt werden.

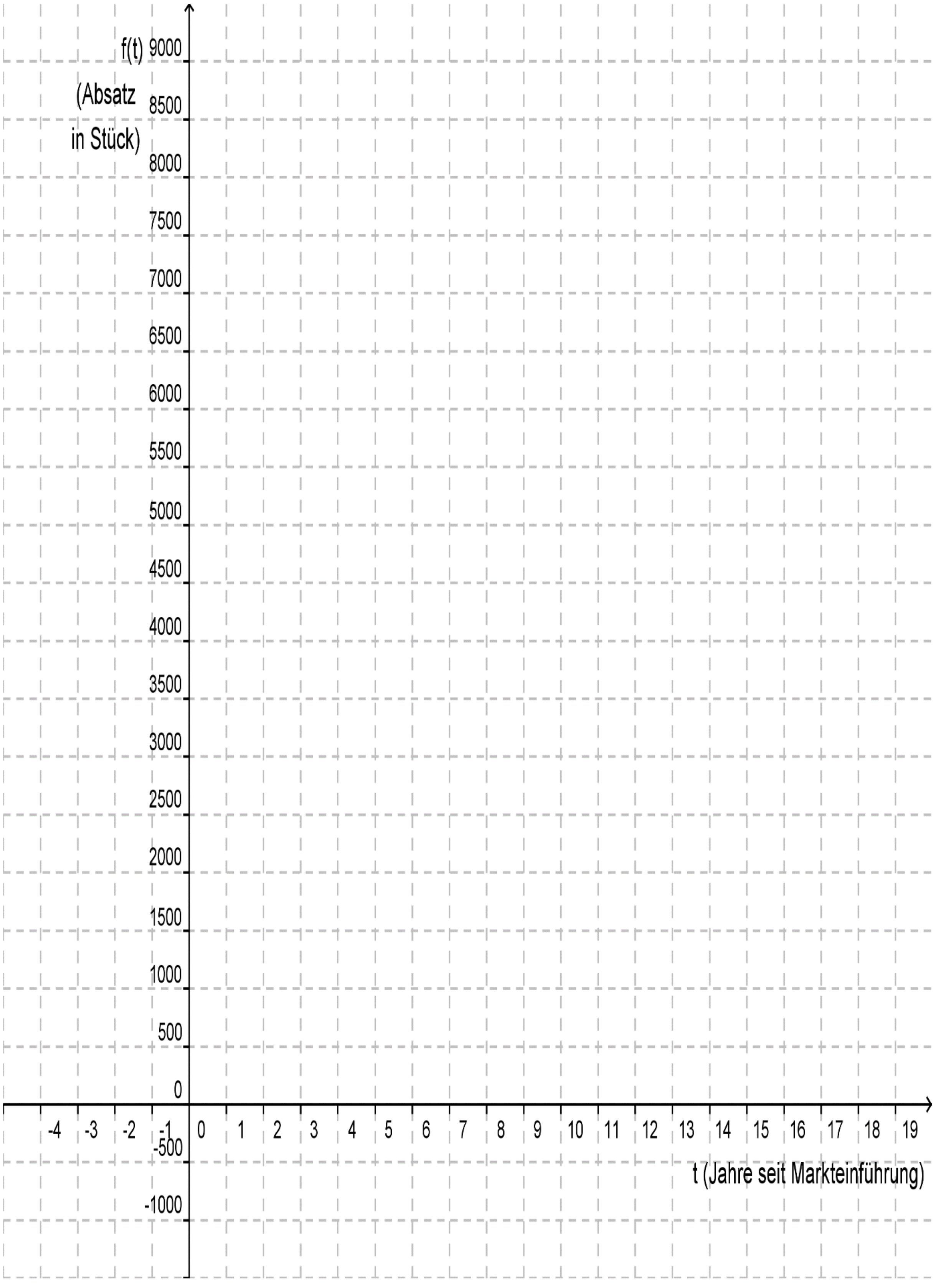
d) Ergänzen Sie Ihre Zeichnung in der Anlage um den Graph der Funktion, die den **kumulierten* Absatz** der Kaminöfen beschreibt.

e) Weisen Sie rechnerisch einen Zusammenhang zwischen dem Hochpunkt der Absatzfunktion f und dem Wendepunkt der kumulierten Absatzfunktion F nach und machen Sie diese Beziehung im Sachzusammenhang plausibel. Begründen Sie die Notwendigkeit dieses Zusammenhangs mathematisch.

f) In Deutschland soll eine neue Abgaswertenorm für Holzöfen ab dem Jahr 2015 verbindlich gelten. Sie verlangt eine veränderte Konstruktion der Kaminöfen. Dadurch ist der Ofen SCAN in Deutschland vor Ablauf des Produktlebenszyklus so nicht mehr zugelassen. Berechnen Sie den **Umsatzausfall** für das Unternehmen Jutor durch diese Änderung der Zulassungsbestimmungen.

* Kumulieren bedeutet Anhäufen. Der kumulierte Absatz beschreibt also die bis zum betrachteten Zeitpunkt **insgesamt abgesetzte** Menge.

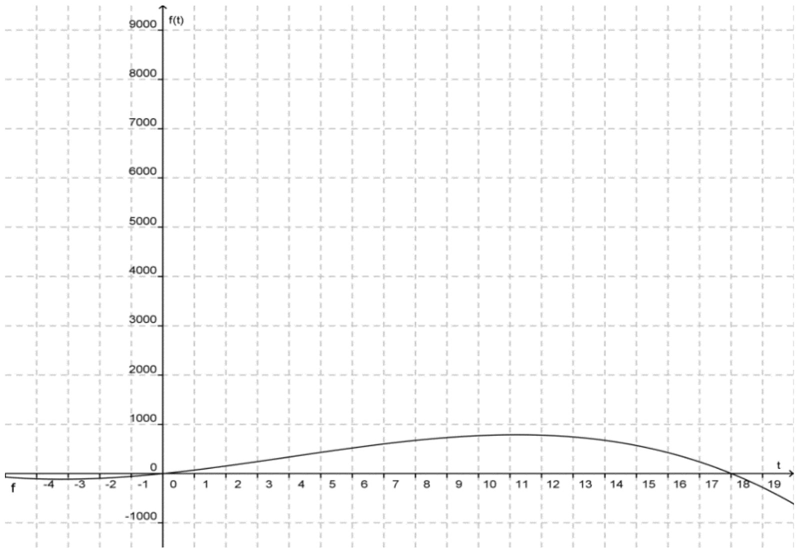
Anhang zu Aufgabe 1:



<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze zu Aufgabe 1 „Produktlebenszyklus“</th><th colspan="3">Anforderungs-
bereiche</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Allgemeine Funktionsgleichung:
$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$
Ableitungen:
$f'(t) = 3at^2 + 2bt + c \qquad f''(t) = 6at + 2b$

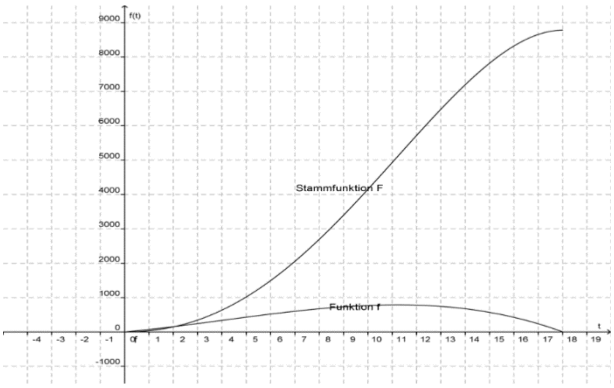
Aufstellen der Gleichungen:
$P_1(0;0) \quad \rightarrow \quad 0 = d$
$P_2(2;154) \quad \rightarrow 154 = 8a + 4b + 2c$
Wendepunkt bei $x = 4 \rightarrow f''(4) = 0 \rightarrow \quad 0 = 24a + 2b$
$P_3(5;430) \quad \rightarrow 430 = 125a + 25b + 5c$

Lösen des Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus liefert $a = -0{,}6$, $b = 7{,}2$ und $c = 65$ und $d = 0$

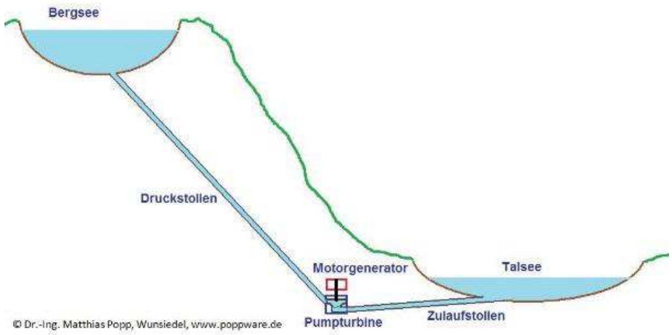
Ergebnis: $f(t) = -0{,}6t^3 + 7{,}2t^2 + 65t$</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Berechnung der Nullstellen:
$$f(t) = 0$$
$$0 = -0{,}6t^3 + 7{,}2t^2 + 65t$$
$$0 = t(-0{,}6t^2 + 7{,}2t + 65)$$
$$t_1 = 0 \quad t_2 = 18{,}01 \quad t_3 = -6{,}01$$
Definitionsbereich: $D = [0;18]$

Begründung:
Die Funktion beschreibt den Produktlebenszyklus nur dort realistisch, wo die Variable und die Funktionswerte nicht negativ sind.</td><td>4</td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

c)	Gesamter Absatz: $\int_0^{18} f(t)dt = [-0{,}15t^4 + 2{,}4t^3 + 32{,}5t^2]_0^{18}$ $= 8780{,}4 - 0 = 8780{,}4$ Durchschnittlicher Absatz: $\frac{1}{18}\int_0^{18} f(t)dt = 487{,}8 \cong 488$ Der durchschnittliche Absatz beträgt ca. 488 Stück pro Jahr.	2	4	
d)		2	2	
e)	Hochpunkt der Absatzfunktion f: Ableitungen: $f'(t) = -1{,}8t^2 + 14{,}4t + 65 \qquad f''(t) = -3{,}6t + 14{,}4$ Notw. Bed.: $f'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = 11{,}22 \quad t_2 = -3{,}22 \notin D$ Hinr. Bed.: $f''(11{,}22) = -25{,}99 < 0 \rightarrow HP$ An der Stelle *t=11,22* befindet sich gleichzeitig der Wendepunkt der kumulierten Absatzfunktion, denn $F''(11{,}22) = f'(11{,}22) = 0$ und $F'''(11{,}22) = f''(11{,}22) = -25{,}99 \neq 0 \rightarrow WP$ Zum Zeitpunkt des maximalen Absatzes nimmt der kumulierte Absatz am stärksten zu. Die Absatzfunktion f ist die Ableitung der kumulierten Absatzfunktion F. Daher gilt: $f'(t) = 0$ ist gleichbedeutend mit $F''(t) = 0$.			4
f)	$\int_{15}^{18} f(t)dt = [-0{,}15t^4 + 2{,}4t^3 + 32{,}5t^2]_{15}^{18} = 8780{,}4 - 7817{,}75$ $= 961{,}65$ Umsatzausfall: $961{,}65 \cdot 800 = 769.320$ € Der Umsatzausfall durch die Gesetzesänderung beträgt 769.320 €.	2	4	
	Summe:	**10**	**26**	**4**

Aufgabe 2: Pumpspeicherkraftwerk



Talsperren werden nicht nur als Trinkwasserreservoir, sondern auch für die Energiespeicherung genutzt. So können Talsperren, die in einer gebirgigen Landschaft gebaut wurden, um ein Pumpspeicherkraftwerk erweitert werden. Dieses verwendet nachts die überschüssige elektrische Energie dafür, Wasser in einen höher gelegenen Stausee zu pumpen, um es bei Bedarf am Tag wieder ablaufen zu lassen, so dass mit Hilfe von Generatoren die potenzielle Energie des Wassers wieder in elektrische Energie umgewandelt wird.

Die Funktion $f(t) = -2t^3 + 24t^2$ beschreibt im Bereich zwischen ihren Nullstellen die technisch nutzbare Wassermenge *f(t)* in Kubikmeter m^3 im höher gelegenen Stausee in Abhängigkeit von der Zeit *t* in Stunden *h*, wobei der Zeitpunkt t = 0 der Uhrzeit 22:00 Uhr entspricht.

a) Zeigen Sie, dass die Zeitspanne zwischen 22:00 Uhr und 10:00 Uhr den sinnvollen Betrachtungszeitraum der Funktion beschreibt.

b) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im sinnvollen Bereich und interpretieren Sie Ihre grafische Darstellung im Sachzusammenhang.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die maximal gespeicherte Wassermenge.

d) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt das Pumpspeicherkraftwerk die maximale Wassermenge hochpumpt.

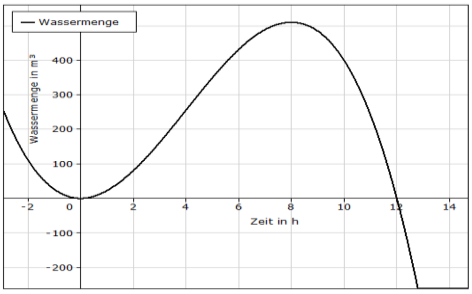
e) Wählen Sie aus und begründen Sie:

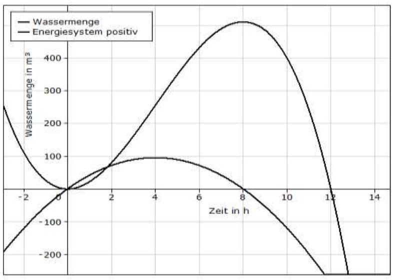
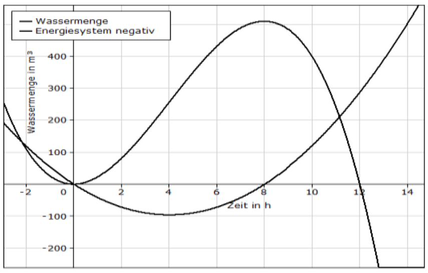
Die Funktionswerte der Funktion f' geben an:
- den maximalen Wasservorrat
- den Wasservorrat zu einer bestimmten Zeit
- welche Wassermenge je Stunde zu- oder abfließt
- die Zeit, die zum Füllen des Speichers nötig ist

f) Eine weitere Funktion *g(t)* beschreibt in der Zeitspanne von 22:00 bis 10:00 Uhr die zugeführte bzw. abgegebene elektrische Energie (in kWh) in Abhängigkeit von der Zeit t. Ergänzen Sie Ihre Zeichnung um einen möglichen Verlauf des Graphen der Funktion g und entscheiden Sie sich – **begründet** – für einen Funktionstyp.

g) Die Studentin Frau Power möchte für ihre Studienarbeit die Funktionsgleichung zu einer anderen Jahreszeit errechnen. Während der Nacht führt sie mehrere Messungen durch.

Um 23:00 Uhr wurde eine Wassermenge von 162 m³, um 1:20 Uhr einen Höchststand von 296,3 m³ und um 6:00 Uhr eine Wassermenge von 64 m³ bestimmt.
Ermitteln Sie anhand dieser Angaben die zugehörige Funktionsgleichung h(t).

Lösungsskizze zu Aufgabe 2 „Pumpenspeicherkraftwerk“		**Anforderungsbereiche** **I**	**II**	**III**
a)	Berechnung der Nullstellen: f(t) = 0 = -2 t^2 (t – 12) Ausklammerungsverfahren Lösung: : $t_{1;2} = 0$, $t_3 = 12$ Im Zeitraum von 22:00 Uhr (t=0) und 10:00 Uhr (t=12) verläuft der Funktionsgraph im ersten Quadranten und somit befindet sich ein Wasservorrat im Reservoir.	3	2	
b)	 z. B.: Zwischen 22:00 und 6:00 Uhr wird das Wasser in den höher gelegenen Stausee hochgepumpt. Zwischen 6:00 und 10:00 Uhr wird es abgelassen.	3	2	
c)	Gesucht: Hochpunkt Ableitungen: $f'(t) = -6t^2 + 48t;\quad f''(t) = -12t + 48$ Notw. Bed.: $f'(t) = 0 \qquad 0 = -6t^2 + 48t = -6t\,(t-8)$ $t_1 = 0;\ t_2 = 8$ Hinr. Bed.: $f''(t) \neq 0 \quad f''(0) = 48 \rightarrow TP \quad f''(8) = -48 \rightarrow HP$ Funktionswert: $f(8) = 512$ Die maximal gespeicherte Wassermenge beträgt 512 m^3.	2	4	
d)	Gesucht: Wendepunkt Ableitungen: $f''(t) = -12t + 48\ ,\quad f'''(t) = -12$ Notw. Bed.: $f''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = -12t + 48 \qquad t = 4$ Hinr. Bed.: $f'''(t) \neq 0 \quad f'''(4) = -12 \rightarrow WP$ Zum Zeitpunkt t = 4, d. h., um 02:00 Uhr wird die maximale Wassermenge hochgepumpt.	2	4	
e)	Die richtige Antwort lautet: Die Funktionswert geben die zu- oder abfließende Wassermenge je Stunde an. Begründung: f‘ gibt zu jedem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate (Steigung) der Funktion f (der Wassermenge) an.		4	

f)	1. Möglichkeit mögliche Alternative:   Die Kurve verläuft parabelförmig, d. h., es handelt sich um eine quadratische Funktion. Mögliche Begründungen: o Die Nullstellen von g entsprechen den Nullstellen von f‘. Der Graph der Funktion g entspricht dem Graph der Ableitungsfunktion f(t) mit einem unbekannten Parameter gestaucht. o Je mehr Wasser gerade hochgepumpt wird, desto mehr Energie ist dafür nötig. Deshalb ist der Energieeinsatz (Hochpunkt bzw. maximale Energiezufuhr) von g an der Stelle des Wendepunktes von f. o Positive Funktionswerte von g bedeutet Energiezufuhr (Wasserstand im Speicher steigt). o Negative Funktionswerte von g bedeutet Energieabfuhr (Wasserstand im Speicher sinkt).		2	4
g)	LGS $h(t) \quad = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t^1 + a_0$ $\underline{h`(t) \quad = 3a_3t^2 + 2a_2t^1 + a_1}$ I h(t=1)= 162 $162 \quad = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ II h(t=8)= 64 $64 \quad = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + a_0$ III h(t=3,3)= 296,3 $296{,}3 \ = \frac{1000}{27}a_3 + \frac{100}{9}a_2 + \frac{10}{3}a_1 + a_0$ IV h□(t=3,3)= 0 $0 \quad = \frac{300}{9}a_3 + \frac{20}{3}a_2 + a_1$ Frau Power sollte die folgende Funktionsgleichung ermitteln: $h(t) = 2t(t-10)^2 = 2t^3 - 40t^2 + 200t^1 + 0$		8	
	Summe:	**10**	**26**	**4**

Aufgabe 3: Temperaturverlauf von Kaffee

© Lupo/PIXELIO
www.pixelio.de

Folgendes ist Ihnen bestimmt auch schon passiert: Sie gießen sich heißen Kaffee oder Tee in eine Porzellantasse, vergessen ihn dann aber zu trinken, so dass er sich langsam abkühlt.

Frau Jacobs beschreibt das Abkühlen Ihres Kaffees am vergangenen Sonntag durch die Funktion f mit folgender Funktionsgleichung:

$$f(t) = \frac{-650t - 162.500}{t^2 - 190t - 2.000}$$

Dabei steht die Variable *t* für die Zeit seit dem Einschenken in Minuten, der Funktionswert *f(t)* für die Temperatur des Kaffees in °C zum Zeitpunkt *t*.

a) Frau Jacobs stellt zwei Behauptungen auf:
   1. Die Temperatur des Kaffees zum Zeitpunkt des Einschenkens betrug 81,25°C.
   2. Schon nach zwanzig Minuten hatte sich die Temperatur des Kaffees **um 60 % reduziert**.

   Überprüfen Sie die Behauptungen von Frau Jacobs.

b) Zeichnen Sie den Graph der Funktion im Bereich zwischen seinen Definitionslücken. Wählen Sie dabei das Intervall $[0; 100]$ als Bereich für die **y-Achse.** Markieren Sie nun den Abschnitt des Graphen, der den Temperaturverlauf realistisch beschreibt und begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Leiten Sie den in diesem Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich **exakt** her. Führen Sie die dazu notwendigen Rechenschritte durch.

Herr König schlägt vor, den Temperaturverlauf durch eine Exponentialfunktion der Form

$$g(t) = b \cdot a^t + 19{,}5$$

zu beschreiben.

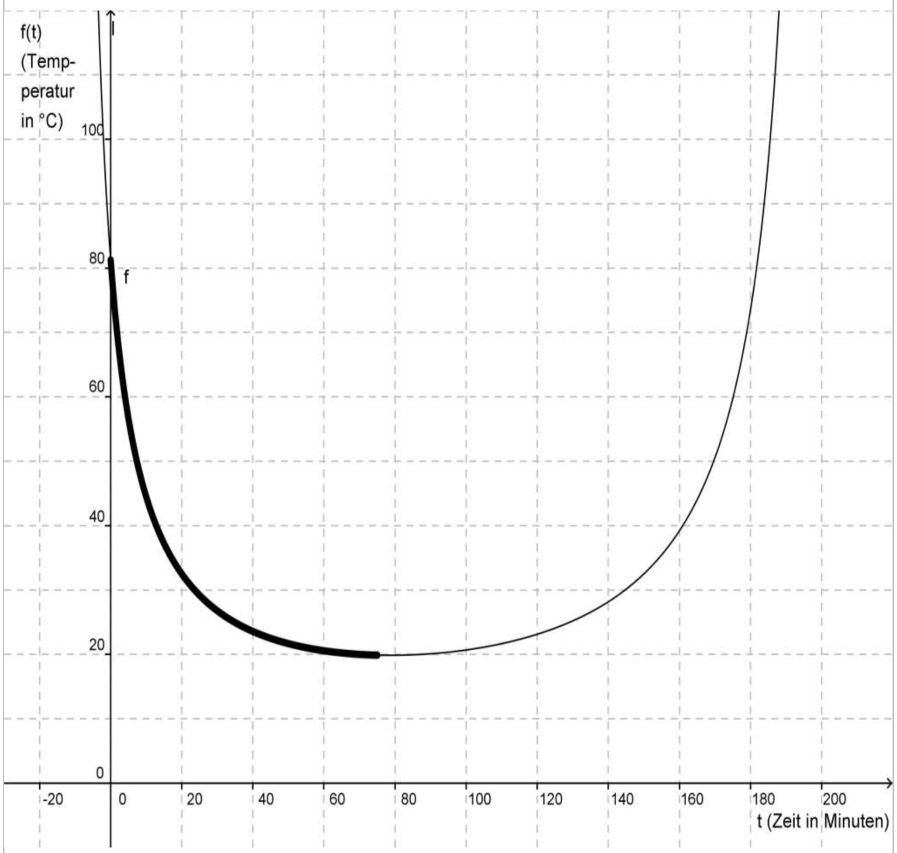
d) Die konkrete Funktionsgleichung soll so gestaltet werden, dass sie die Behauptungen von Frau Jacobs (vgl. Teilaufgabe a) erfüllt. Bestimmen Sie diese. Runden Sie dabei auf vier Dezimalstellen.

e) Zeichnen Sie den Graph der Funktion *g* in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe b ein.

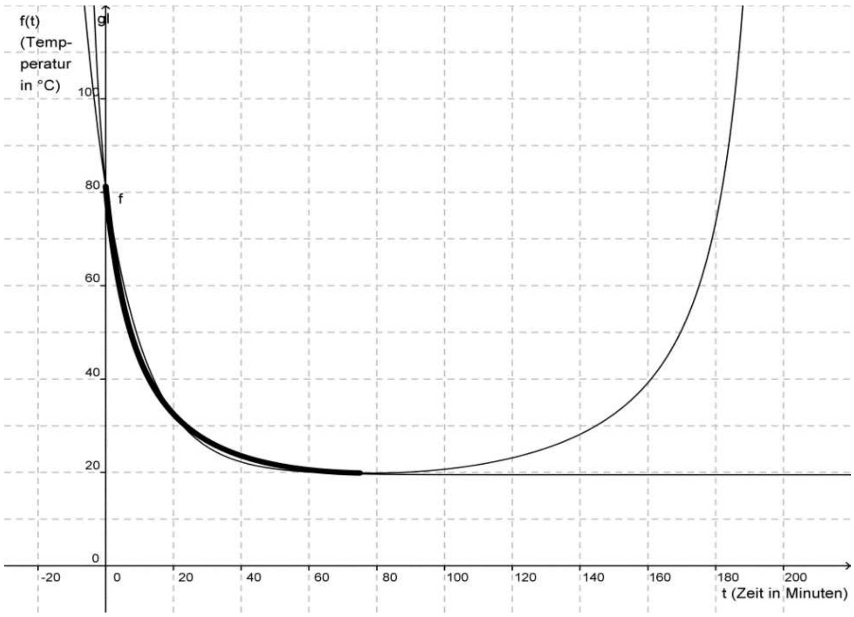
f) Berechnen Sie, wie lange Sie warten müssen, bis sich die Anfangstemperatur halbiert hat.

g) Entscheiden Sie sich für die Funktionsgleichung, die den Temperaturverlauf am besten beschreibt. Begründen Sie Ihre Auswahl.

Kontrollergebnisse:	$f'(t) = \frac{650t^2 + 325.000t - 29.575.000}{(t^2 - 190t - 2.000)^2}$
	$g(t) = 61{,}75 \cdot 0{,}9251^t + 19{,}5$

Lösungsskizze zu Aufgabe 3 „Temperaturverlauf von Kaffee“		Anforderungsbereiche I	 II	 III
a)	1. Behauptung: gesucht: y-Achsenabschnitt $f(0) = \frac{-162.500}{-2.000} = 81{,}25$ 2. Behauptung: gesucht: Funktionswert an der Stelle t=20 $f(20) = \frac{-650 \cdot 20 - 162.500}{20^2 - 190 \cdot 20 - 2.000} = 32{,}5$ 40% der ursprünglichen Temperatur des Kaffees $81{,}25 \cdot 0{,}4 = 32{,}5 = f(20)$ Antwort: Beide Behauptungen stimmen.	2	4	
b)	Berechnung der Definitionslücken: Bed.: $N(t) = 0$ $t^2 - 190t - 2.000 = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = -10 \quad t_2 = 200$ Zeichenbereich: $-10 \leq t \leq 200$  Der sinnvolle Abschnitt des Graphen beginnt im y-Achsenabschnitt (Zeitpunkt des Einschenkens) und endet bei seinem Tiefpunkt, da			

	die Temperatur des Kaffees, wenn sie erst die Zimmertemperatur erreicht hat, nicht wieder ansteigen kann.	4	4	
c)	Gesucht: Abszisse des Tiefpunktes Ableitung: $f'(t) = \frac{-650\cdot(t^2-190t-2.000)-(-650t-162.500)\cdot(2t-190)}{(t^2-190t-2.000)^2}$ $= \frac{-650t^2+123.500t+1.300.000+1.300t^2+325.000t-123.500t-30.875.000}{(t^2-190t-2.000)^2}$ $= \frac{650t^2+325.000t-29.575.000}{(t^2-190t-2.000)^2}$ Notw. Bed.: $f'(t) = 0$ $650t^2 + 325.000t - 29.575.000 = 0$ $t_1 = -578{,}63 \notin D \qquad t_2 = 78{,}63$ Hinr. Bed.: VZW-Kriterium $f'(70) = -0{,}03 \qquad f'(80) = 0{,}03 \quad \rightarrow$ TP Definitionsbereich: $\mathbb{D} = [0; 78{,}63]$		8	2
d)	1. Behauptung: $f(0) = 81{,}25$ $81{,}25 = b \cdot a^0 + 19{,}5 \quad / \quad -19{,}5$ $b = 61{,}75$ 2. Behauptung: $f(20) = 32{,}60$ (32,50 entspricht 40 % von 81,25) $32{,}50 = 61{,}75 \cdot a^{20} + 19{,}5 \quad / \quad -19{,}5 \quad / \quad \div 61{,}75$ $\frac{4}{19} = a^{20} \quad / \quad \sqrt[20]{\ }$ $a = 0{,}9251$ Lösung: Die Funktionsgleichung lautet: $g(t) = 61{,}75 \cdot 0{,}9251^t + 19{,}5$		6	

e)		4		
f)	$81{,}25 \div 2 = 40{,}625$ $40{,}625 = 61{,}75 \cdot 0{,}9251^t + 19{,}5 \quad / \ -19{,}5 \quad / \ \div 61{,}75$ $0{,}3421 = 0{,}9251^t \quad / \ ln$ $t = \frac{ln0{,}3421}{ln0{,}9251} = 13{,}78$ Nach knapp 14 Minuten hat sich die Temperatur halbiert.	0	4	
g)	Die Funktionsgleichungen beschreiben den Temperaturverlauf im Definitionsbereich der Funktion f gleich gut. Die Funktion g ist deshalb besser geeignet, da ihr Definitionsbereich auf $\mathbb{R}^+$ ausgedehnt werden kann.			2
	Summe:	**10**	**26**	**4**

Aufgabe 4: Smartphone

Ein neues Smartphone, ideal zum Surfen und Telefonieren, kommt neu auf den Markt.

© Ute Mulder/PIXELIO
www.pixelio.de

Verschiedene Abteilungen des Unternehmens beschäftigen sich mit der Analyse der Absatzentwicklung und der Produktionskosten.

Die Variable t beschreibt den Monat des **laufenden** Jahres und der Funktionswert $f(t)$ beschreibt die Absatzmenge in Stück.

4.1 Seit Januar 2012 ist das Smartphone im Sortiment. Die Absatzentwicklung wird durch die folgende Tabelle dargestellt:

Zeit t (Monat)	1	4	12
Absatzmenge f(t) in Stück	200	530	1410

a) Stellen Sie die Absatzentwicklung grafisch dar.
b) Beschreiben Sie die Absatzentwicklung durch eine geeignete Funktionsgleichung. Begründen Sie zunächst Ihre Wahl des Funktionstyps.

4.2 Durch geeignete Werbemaßnahmen kann die Absatzentwicklung ab Januar 2013 entscheidend verbessert werden, wie die folgende Tabelle zeigt:

Zeit t (Monat)	1	4	7
Absatzmenge g(t) in Stück	1650	2196	2923

a) Zeigen Sie, dass die Absatzentwicklung durch eine geeignete Funktionsgleichung der Form $\boldsymbol{g(t) = b \cdot a^t}$ dargestellt werden kann.
Kontrollergebnis: $g(t) = 1500 \cdot 1{,}1^t$

b) Berechnen Sie die Absatzmenge an Smartphones im Dezember 2013.

c) Bestimmen Sie, in welchem Zeitraum sich der Absatz an Smartphones – nach diesem Modell – **verdoppelt** hat.

d) Skizzieren Sie den Verlauf der Absatzentwicklung g. Vergleichen Sie die beiden Modelle der Absatzentwicklungen miteinander.

e) Beurteilen Sie, ob bei diesem Modell g ein realistischer Verlauf vorliegt. Beschreiben Sie ggf. einen realistischeren Verlauf der Absatzentwicklung.

4.3 Für die Herstellung dieses Smartphones fallen wegen neuer Produktionsmethoden sowie der Anlaufkosten für die ersten Exemplare hohe Kosten an. Während der Montage werden die Herstellungskosten ständig durch eine verbesserte Auslastung der Produktion und der gleichbleibenden Arbeitsabläufe reduziert.

Die Produktionskosten (in €) jedes Smartphones können durch die folgende Funktion f mit der Funktionsgleichung

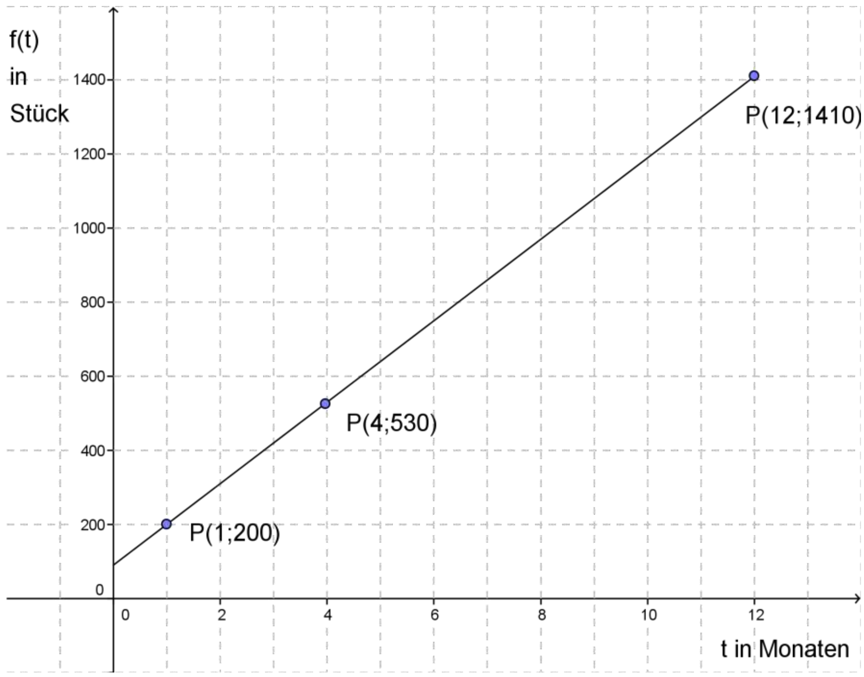
$$f(x) = 280 + 420 \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$$

beschrieben werden, wobei die Variable x für die ***Nummer*** der fortlaufend nummerierten Smartphones steht. Es beschreibt also $f(\mathbf{1})$ die Produktionskosten des **1.** Smartphones, $f(\mathbf{2})$ die des **2.** usw.

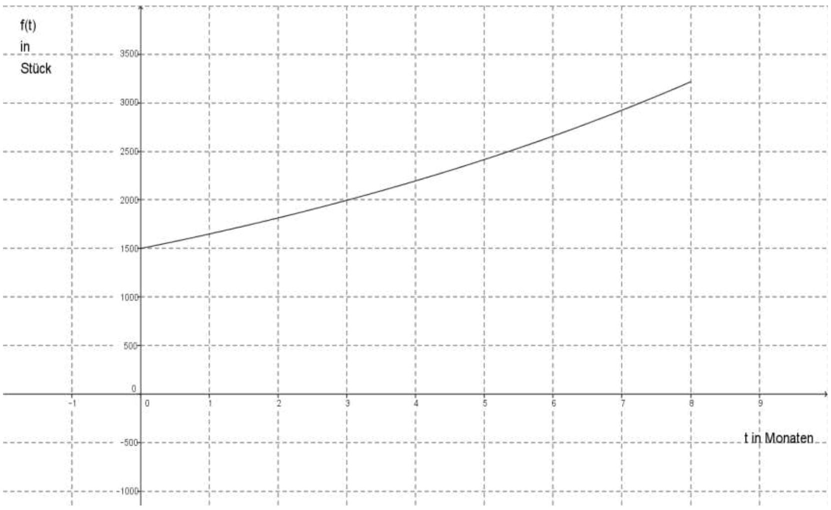
a) Stellen Sie die Entwicklung der Produktionskosten für die ersten 50 Smartphones grafisch dar. Benennen Sie die Art des Wachstums.

b) Berechnen Sie, bei dem wievielten Smartphone Kosten in Höhe von 299 € erwartet werden.

c) Bestimmen Sie die Höhe der Herstellungskosten, die langfristig erwartet werden.

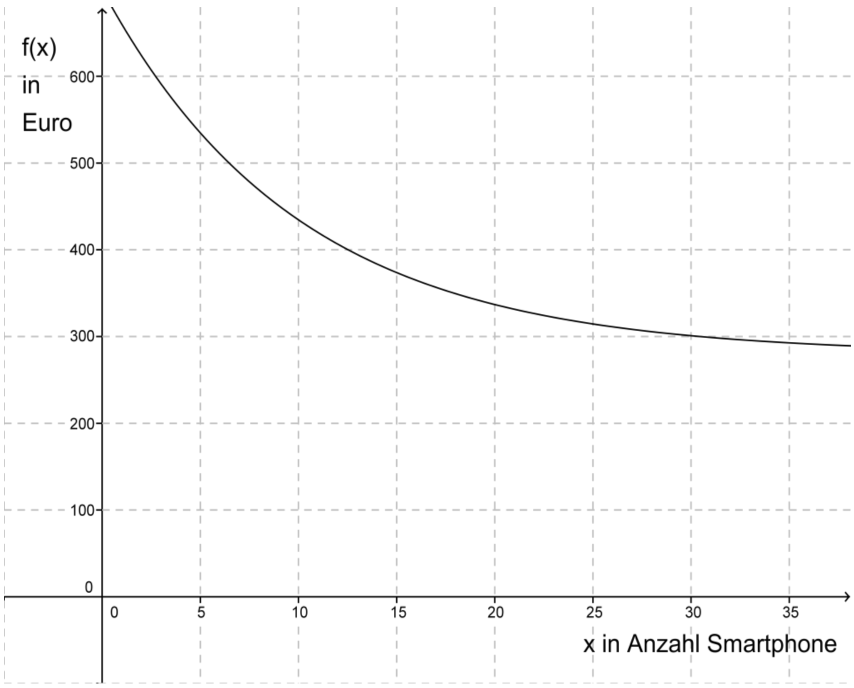
<table>
<tr><td colspan="2">Lösungsskizze zu Aufgabe 4 „Smartphone“</td><td colspan="3">Anforderungs-bereiche</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>4.1
a)</td><td>
</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Da als Funktionsgraph eine Gerade vorliegt, handelt es sich um eine lineare Funktion.
Die Funktionsgleichung lautet : $f(t) = mt + b$

Aufstellen der Funktionsgleichung mit den Punkten
$P_1(1; 200)$, $P_2(4; 530)$
Steigung: $m = \frac{530-200}{4-1} = 110$
y-Achsenabschnitt: $200 = 110 \cdot 1 + b$; $b = 90$
Überprüfung: $f(12) = 110 \cdot 12 + 90 = 1410$ wahre Aussage
Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:
$\underline{f(t) = 110 \cdot t + 90}$</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2
a)</td><td>Aufstellen der Funktionsgleichung
$g(t) = b \cdot a^t$
$P_1(1; 1650) \rightarrow 1650 = b \cdot a^1 \rightarrow b = \frac{1650}{a}$
$P_2(4; 2196) \rightarrow 2196 = b \cdot a^4$
$21{,}96 = \frac{16{,}5}{a} \cdot a^4 \rightarrow 1{,}33 = a^3 \rightarrow a = 1{,}1$
$b = \frac{1650}{1{,}1} = 1500$
Überprüfung: $g(7) = 1500 \cdot 1{,}1^7 = 2923$ wahre Aussage</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $g(t) = 1500 \cdot 1{,}1^t$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$g(12) = 4708$
Im Dezember 2013 werden voraussichtlich 4708 Smartphones abgesetzt.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$g(t) = 1500 \cdot 1{,}1^t$
Verdopplung des Startwertes führt zu 3000 Smartphones.
$3000 = 1500 \cdot 1{,}1^t \quad \rightarrow \quad 2 = 1{,}1^t \quad \rightarrow \quad t = \frac{ln2}{ln1{,}1} = 7{,}27$
Nach 7,3 Monaten hat sich die Absatzmenge verdoppelt.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Die Absatzentwicklung im ersten Modell beschreibt ein lineares Wachstum. Die Stückzahl der Smartphones nimmt in den gleichen Zeitspannen immer um den gleichen Betrag zu. Beim linearen Wachstum ist die Steigung (Anstieg der Stückzahl) immer gleich.

Die Absatzentwicklung im zweiten Modell beschreibt ein exponentielles Wachstum. Die Stückzahl der Smartphones vervielfacht sich mit dem gleichen Faktor. Beim exponentiellen Wachstum steigt die Stückzahl der Smartphones zunächst langsamer und wird im Laufe der Zeit immer größer, d. h., der Anstieg wird im Laufe der Zeit steiler.</td><td></td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Das Modell ist zunächst realistisch, für große t jedoch nicht. Der Absatz wird ab einer bestimmten Zeit wieder sinken und zu Null werden, da das Smartphone dann technisch überaltert ist.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
</table>

4.3 a)	 Es liegt eine beschränkte Abnahme vor.	3		
b)	$299 = 280 + 420 \cdot e^{-0,1x}$ $19 = 420 \cdot e^{-0,1x}$ $0{,}045 = e^{-0,1x}$ $-3{,}0958 = 0{,}1x$ $\underline{x = 30{,}96}$ Ungefähr bei dem 31. Smartphone werden Kosten in Höhe von 299 € erwartet.	3	2	
c)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 280$ Die Herstellungskosten, die langfristig erwartet werden, betragen 280 €.		3	
	Summe:	**10**	**25**	**5**

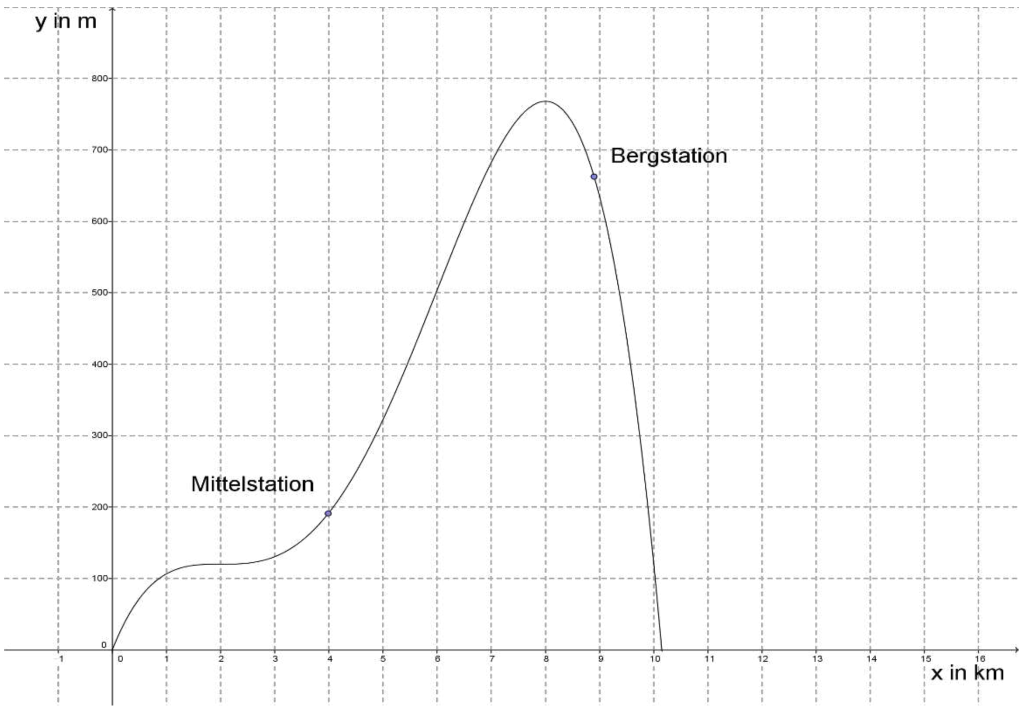
Aufgabe 5: Höhenprofil

Im Rahmen der Abschlussfahrt nach bestandener Fachhochschulreifeprüfung nach Südtirol steht eine Bergbesteigung auf dem Programm.

Die untenstehende Abbildung beschreibt das **Höhenprofil** dieser Bergbesteigung. Dieses Profil entspricht näherungsweise dem Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + 24x^3 - 108x^2 + 192x,$$

wobei die Wanderung im Ursprung des Koordinatensystems beginnt.



5.1 Berechnen Sie, mit welcher Steigung die Bergwanderung beginnt. Zeigen Sie, dass es eine weitere Stelle im Höhenprofil gibt, an der die Steigung ebenso groß ist.

5.2 Bestimmen Sie, wie viele Höhenmeter die Wanderer bis zum Gipfel überwinden müssen.

5.3 Die Mittelstation liegt im Punkt $M(4/f(4))$. Zwischen der Mittelstation und der Bergstation wurde eine Seilbahn so konstruiert, dass sie

- geradlinig verläuft und
- in der Mittelstation das Höhenprofil berührt.

Zeigen Sie zeichnerisch und rechnerisch, dass die Bergstation auf einer Höhe von 662 m liegen muss und berechnen Sie die Länge des Seils.

Hinweis: Die Höhe der Gebäude bleibt jeweils unberücksichtigt.

Kontrollergebnis: Bergstation $B(8{,}9; 662)$

5.4 Der Bergführer tröstet seine Wandergruppe mit folgenden Worten: „Seht euch die Seilbahn an, wie sie gemächlich den Berg hinaufführt. Auf unserer Wanderung werden wir an keiner Stelle eine Steigung überwinden müssen, die doppelt so groß ist wie die der Seilbahn.“ Überprüfen Sie diese Behauptung.

5.5 Natürlich wissen Sie, dass ein frei aufgehängtes Seil durchhängt. Unter vereinfachten Bedingungen kann der Verlauf des durchhängenden Seiles näherungsweise als eine nach oben geöffnete Parabel beschrieben werden.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $g(x)$ des Seils unter Berücksichtigung der folgenden Angaben:

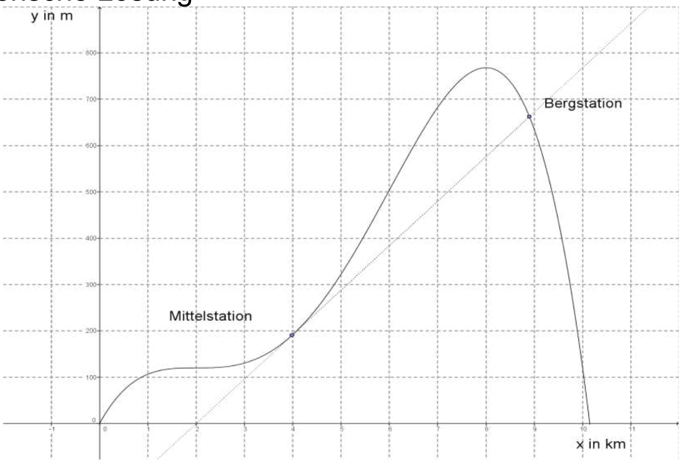
- Das durchhängende Seil hat dieselben Aufhängepunkte $M(4/f(4))$ und $B(8{,}9/662)$ wie das Seil aus Teilaufgabe 5.3.
- Die größte Durchhängung besitzt das Seil an der Stelle $x = 5$

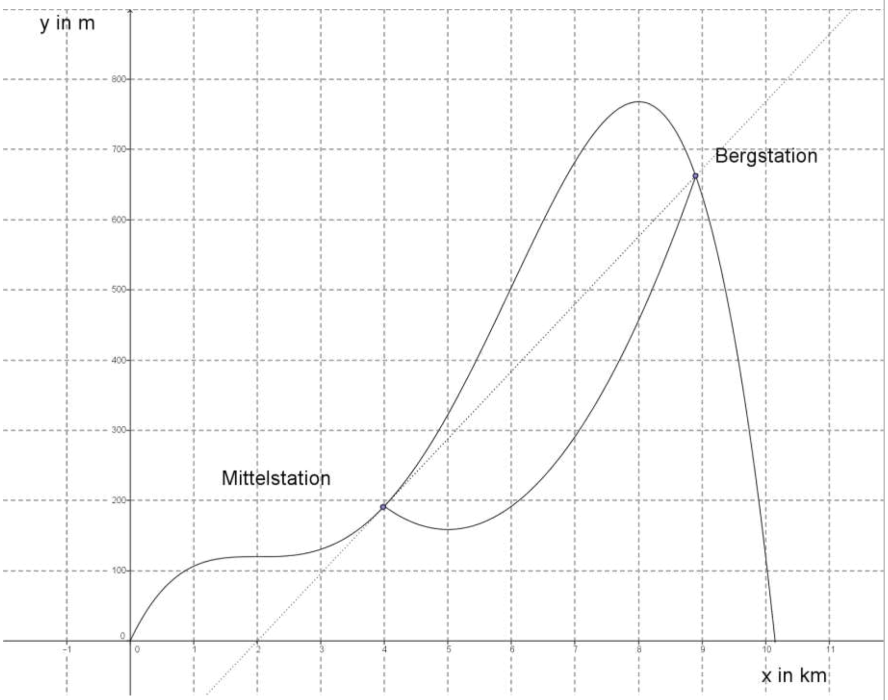
Kontrollergebnis: $g(x) = 33{,}08x^2 - 330{,}75x + 985{,}92$

5.6 Ermitteln Sie den **durchschnittlichen** Abstand zwischen der zunächst angenommenen geradlinigen (siehe 5.3) und der in Teilaufgabe 5.5 errechneten parabelförmigen Seilverbindung zwischen der Mittelstation und der Bergstation. Stellen Sie diesen Zusammenhang zunächst grafisch dar.

Hinweis: Die Aufgabenidee entstand im Workshop Mathematik am 06.11.2012 in Boppard. Vielen Dank an die beteiligten Kolleginnen und Kollegen.

Lösungsskizze zu Aufgabe 5 „Höhenprofil“		**Anforderungsbereiche** **I**	 **II**	 **III**
5.1	$f'(x) = -6x^3 + 72x^2 - 216x + 192$ $f'(0) = 192$ Die momentane Steigung am Start der Bergwanderung beträgt 192 m pro km. $f'(x) = 192$: $-6x^3 + 72x^2 - 216x + 192 = 192$ $-6x^3 + 72x^2 - 216x = 0$ $Ausklammern$: $x(-6x^2 + 72x - 216) = 0$ $x = 0 \quad oder \quad -6x^2 + 72x - 216 = 0$ pq-Formel oder abc-Formel $x_1 = 0, \quad x_2 = 6$ Nach sechs Kilometern ist die Steigung ebenso groß wie zu Beginn der Wanderung.	3	3	
5.2	Hochpunkt Ableitungen: $f'(x)$ s.o. $f''(x) = -18x^2 + 144x - 216$ $f'''(x) = -36x + 144$ Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$: $-6x^3 + 72x^2 - 216x + 192 = 0$ Polynomdivision und dann pq-Formel oder abc-Formel $x_1 = 2, x_2 = 8$ Hinreichende Bedingung: $f''(x) < 0$ $f''(2) = 0$ und $f'''(2) = 72 \neq 0 \rightarrow SP$ Alternative: über VZW-Kriterium $\underline{f''(8) = -216 < 0 \rightarrow HP(8; 768)}$ Funktionswert: $f(8) = 768$ Insgesamt müssen 768 Höhenmeter überwunden werden.	2	5	

5.3	Zeichnerische Lösung  Anhand der Grafik sieht man, dass die Bergstation auf einer Höhe von ca. 650 m liegt. Rechnerische Lösung: Tangentengleichung: $t(x) = mx + b$ Steigung: $m = f'(4) = 96$ y-Achsenabschnitt: $t(4) = 192$: $96 \cdot 4 + b = 192 \quad \rightarrow \quad b = -19$ $\underline{t(x) = 96x - 192}$ Berechnung des Schnittpunktes: $t(x) = 662 \quad \rightarrow \quad x = 8{,}9$ $\underline{f(8{,}9) = 662}$ Alternative: Gleichsetzen t(x)=f(x) und nach x auflösen Die Bergstation liegt auf einer Höhe von 662 Metern. Länge des Seils mittels des Satzes von Pythagoras: Horizontalunterschied: $(8{,}9 - 4)km = 4{,}9\ km$ Höhenunterschied: $470m \rightarrow 0{,}47km$ Abstand: $d^2 = 4{,}9^2 + 0{,}47^2 = 24{,}2309 \quad \rightarrow \quad d = 4{,}92$ Das Seil der Seilbahn ist 4,92 km lang.	2	5	2
5.4	Wendestelle: Ableitungen: $f''(x)$ s.o. $f'''(x) = -36x + 144$ Notwendige Bedingung.: $f''(x) = 0$: $\quad -18x^2 + 144x - 216 = 0$ pq-Formel oder abc-Formel $x_1 = 2,\ x_2 = 6$ Hinreichende Bedingung.: $f'''(x) \neq 0$ $f'''(2) = 72 \neq 0 \rightarrow$ SP, da $f'(2) = 0$ und $f''(2) = 0$ $f'''(6) = -72 \neq 0 \quad \rightarrow \quad WP$ Steigung Wanderweg: $f'(6) = 192$ Steigung der Seilbahn: m=96 Die Behauptung des Bergführers stimmt nicht, da an der steilsten Stelle die Steigung des Wanderweges doppelt so groß wie die Steigung der Seilbahn ist.		5	

5.5	Aufstellen des Linearen Gleichungssystems: Allgemeine Form: $g(x) = ax^2 + bx + c$ $g'(x) = 2ax + b$ $M(4;192)$: $g(4) = 192$: $16a + 4b + c = 192$ $B(8{,}9;662)$: $g(8{,}9) = 662$: $79{,}21a + 8{,}9b + c = 662$ $TP(5;y_T)$: $g'(5) = 0$: $10a + b = 0$ Lösen des Linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Taschen-rechners: $a = 33{,}08$, $b = -330{,}75$, $c = 985{,}81$ $\underline{g(x) = 33{,}08x^2 - 330{,}75x + 985{,}81}$		6	
5.6	 Differenzfunktion: $d(x) = t(x) - g(x) = -33{,}08x^2 + 426{,}75x - 1177{,}81$ $\overline{m} = \frac{1}{8{,}9-4}\int_4^{8{,}9} d(x)dx = \frac{1}{4{,}9}[-11{,}03x^3 + 213{,}375x^2 - 1177{,}81x]_4^{8{,}9}$ $\overline{m}$ =132,33 Der durchschnittliche Abstand zwischen den Funktionsgraphen be-trägt etwa 132 m.	2	3	2
	Summe:	**9**	**27**	**4**

Aufgabe 6: Buntes Fenster

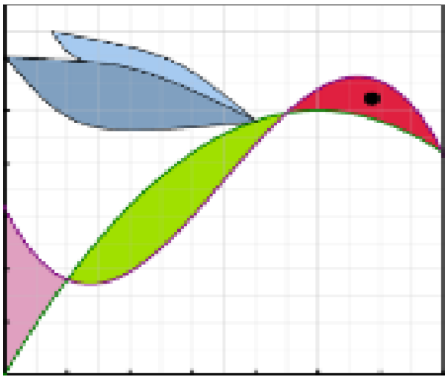
Eine 9 Meter breite und 9 Meter hohe Außenwand eines Schulgebäudes soll ein Fenster in Form eines stilisierten Kolibris erhalten. Das Fenster soll auf der linken und rechten Gebäudekante und vom Boden und der oberen Kante des Schulgebäudes jeweils einen Abstand von einem Meter haben.

Die Konturen von Kopf, Rumpf und Schwanz des Vogels können durch die Graphen der Funktonen f und g mit:

$$f(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}05x^2 - 2{,}3x + 3{,}15 \quad mit\ x \in IR$$

$$g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad mit\ x \in IR$$

beschrieben werden (siehe Skizze). Die Flügel gehören nicht zur Fensterfläche, sie sollen - wie das Auge - nachträglich aufgemalt werden.
Dabei entspricht eine Längeneinheit auf der x- und y-Achse einem Meter.



6.1 Zeichnen Sie den Graph der Funktion f in das Koordinatensystem in der Anlage. Der Graph von g ist bereits eingezeichnet. Berechnen Sie für die Zeichnung zunächst die Extrempunkte und den Wendepunkt der Funktion f. Bestimmen Sie - anhand der Zeichnung - die Definitions- und Wertebereiche beider Funktionen f und g und begründen Sie, dass die oben beschriebenen Abstände eingehalten werden können. Stellen Sie die Außenwand in Ihrer Zeichnung dar.

6.2 Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung $g(x)$ mit folgenden Eigenschaften: der Hochpunkt von g liegt bei $P_1(5; 5)$ und die Schnabelspitze befindet sich im Punkt $P_2(7; 4{,}2)$.

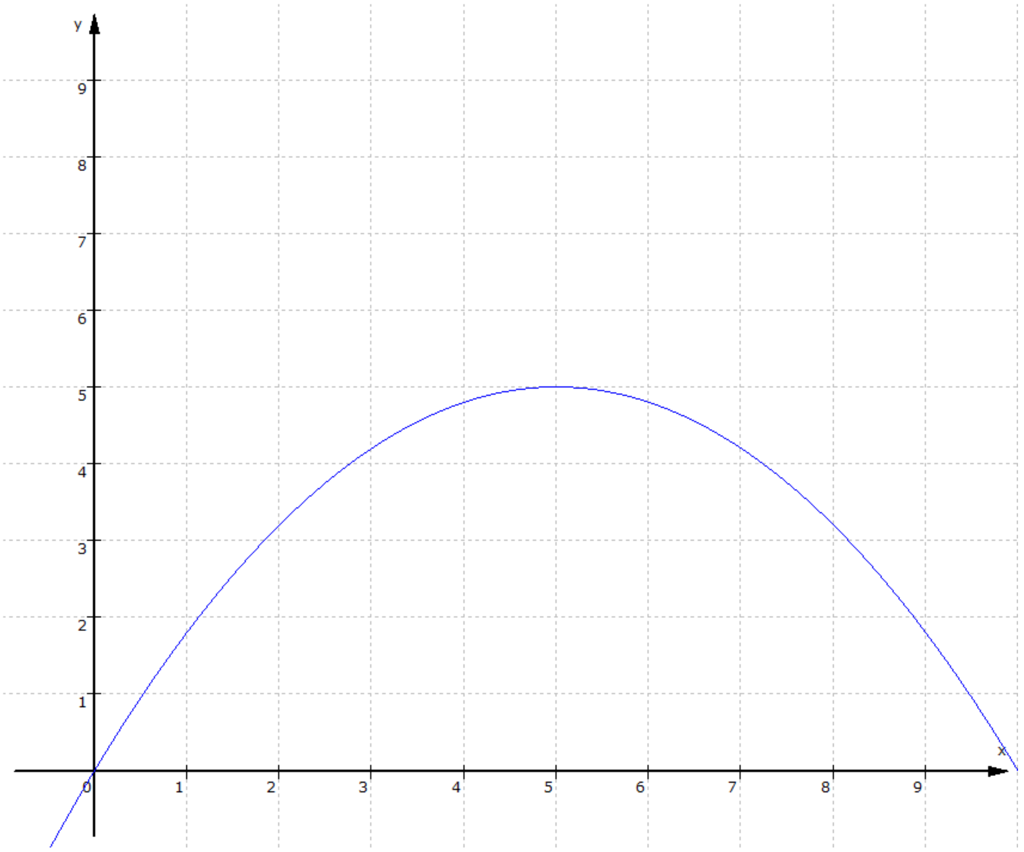
Kontrollergebnis: $g(x) = -0{,}2x^2 + 2x$

6.3 Ermitteln Sie, wie groß der prozentuale Anteil des Flächeninhaltes des Vogels - Flächeninhalt der Glasflächen von Schwanz, Rumpf und Kopf des stilisierten Kolibris - an der Gesamtfläche der Außenwand des Schulgebäudes ist. Veranschaulichen Sie zuerst mit einem detaillierten Vorgehensplan den Lösungsweg der Aufgabe.

6.4 Unterhalb des Vogels soll die Außenwand des Schulgebäudes bis auf 4 m Höhe mit einer Anti-Graffiti-Farbe gestrichen werden. Diese Spezialfarbe wird in 1 Liter-Dosen zu je 44 € angeboten und reicht bei einmaligem Anstrich für etwa 6,25 m² Wandfläche. Veranschaulichen Sie die zu streichende Fläche im gegebenen Schaubild und berechnen Sie die Gesamtkosten für die Spezialfarbe.

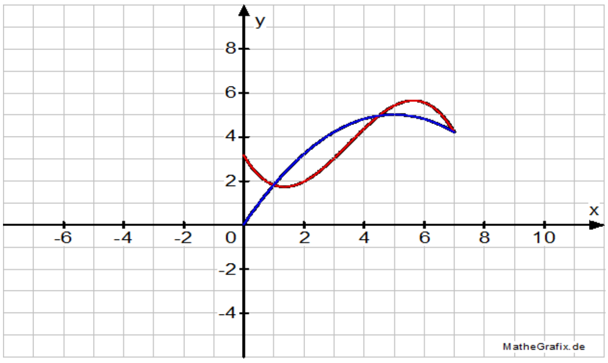
6.5 Eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt. Zeigen Sie anhand der Extrempunkte der gegebenen Funktion f, dass diese Aussage stimmt.

Diese Aufgabe entstand in Anlehnung an den Aufgabenvorschlag B der Abschlussprüfung Fachoberschule Herbst 2012 in Berlin,
http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de /pruefungen_fos.html



<table>
<tr><th colspan="2">Lösungsskizze zu Aufgabe 6 „Buntes Fenster“</th><th colspan="3">Anforderungs-
bereiche
I II III</th></tr>
<tr><td>6.1</td><td>Ableitungen:
$f'(x) = -0{,}3x^2 + 2{,}1x - 2{,}3 \quad f''(x) = -0{,}6x + 2{,}1 \quad f'''(x) = -0{,}6$
Extrempunkte:
$f'(x) = 0\colon\; -0{,}3x^2 + 2{,}1x - 2{,}3 = 0$
$x_{E1} = 1{,}36, \quad x_{E2} = 5{,}64$
$f''(1{,}36) = 1{,}3 > 0 \quad \rightarrow TP(1{,}36; 1.71)$
$f''(5{,}64) = -1{,}3 < 0 \;\rightarrow HP(5{,}64; 5{,}64)$

Wendepunkte:
$f''(x) = 0\colon\; -0{,}6x + 2{,}1 = 0$
$f'''(3{,}5) = -0{,}6 \neq 0 \;\rightarrow\; WP(3{,}5; 3{,}68)$

Graph:


Definitionsbereiche: $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g = [0; 7]$
Wertebereiche: $\mathbb{W}_f = [1{,}36; 5{,}7], \quad \mathbb{W}_g = [0; 5]$
Das bunte Fenster ist 7 Meter breit und 5,7 Meter hoch. (Anmerkung: Die Flügel werden nachträglich aufgemalt.) Zuzüglich der Abstände von einem Meter zum Boden und den Gebäudekanten benötigt man eine Fläche von 9 Metern Breite und 9 Metern Höhe. Das Fenster passt also auf die Außenwand des Schulgebäudes.</td><td>7</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>6.2</td><td>$P_1(5; 5) \rightarrow f(5) = 5\colon \qquad 25 \cdot a_2 + 5\, a_1 + a_0 = 5$
$P_2(7; 4{,}2) \rightarrow f(7) = 4{,}2\colon \quad 47 \cdot a_2 + 7 \cdot a_1 + a_0 = 4{,}2$
$HP(5; 5) \rightarrow f^I(5) = 0 \qquad 10 \cdot a_2 + a_1 = 0$

Alternative: Punkte aus Zeichnung ablesen z. B. $P_0(0/0)$
Lösen des LGS mittels Gauß-Algorithmus oder Einsetzungs-, Additions- oder Substitutionsverfahrens:

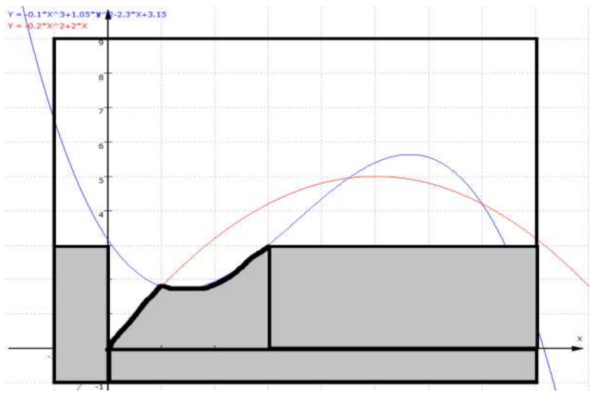
$a_0 = 0 \;;\; a_1 = 2 \;;\; a_2 = -0{,}2 \qquad\qquad g(x) = -0{,}2x^2 + 2x$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>6.3</td>
<td>Mögliche Vorgehensweise:

Differenzfunktion bilden
Nullstellen der Differenzfunktion berechnen → Schnittstellen
abschnittsweise Flächenberechnung mittels Integral

Differenzfunktion bilden:

$d(x) = f(x) - g(x)$
$d(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}05x^2 - 2{,}3x + 3{,}15 - (-0{,}2x^2 + 2x)$
$d(x) = -0{,}1x^3 + 1{,}25x^2 - 4{,}3x + 3{,}15$

Nullstellen der Differenzfunktion berechnen:
$d(x) = 0$: $\quad -0{,}1x^3 + 1{,}25x^2 - 4{,}3x + 3{,}15 = 0$
erste Nullstelle bei Schnabelspitze: $x = 7$
Polynomdivision:
$(-0{,}1x^3 + 1{,}25x^2 - 4{,}3x + 3{,}15) : (x - 7) = -0{,}1x^2 + 0{,}55x - 0{,}45,$
abc-Formel oder pq-Formel
$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 4{,}5 \quad , \quad x_3 = 7$
Flächenberechnung mittels Integral:
Stammfunktion D(x) = $-\frac{1}{40}x^4 + \frac{5}{12}x^3 - 2{,}15x^2 + 3{,}15x + c, \quad c \in IR$
$A_{Fenster} = A_{Schwanz} + A_{Rumpf} + A_{Kopf}$
$A_{Fenster} = \left|\int_0^1 d(x)\,dx\right| + \left|\int_1^{4,5} d(x)\,dx\right| + \left|\int_{4,5}^{7} d(x)\,dx\right|$
$A_{Fenster}$ = 5,67 m²
$A_{Außenwand} = 9m \cdot 9m = 81\,m^2$
Dreisatz: $5{,}67 \cdot 100\% \div 81 = 7\%$
Der Flächeninhalt des Kolibris entspricht 7% der Außenwand.</td>
<td>3</td>
<td>7</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>6.4</td>
<td>Schraffur:


Zu zeigen ist: $f(3) = 3$, sie ist die obere Grenze für die zweite Teilfläche
Zu berechnen sind 5 Teilflächen (siehe Skizze):</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

	$\int_0^1 g(x)dx + \int_1^3 f(x)dx + \int_3^8 3dx + 8 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 32{,}13\ FE$ Die zu streichende Fläche beträgt 32,13 m². $32{,}13 \div 6{,}25 = 5{,}1$ Man muss 6 Dosen Farbe kaufen. $6 \cdot 44€ = 264\ €$ Die Kosten für die Spezialfarbe betragen 264 €.		6	
6.5	Extrempunkte: $T(1{,}36; 1{,}71)$, $H(5{,}64; 5{,}64)$ Wendepunkt: $W(3{,}5; 3{,}68)$ Es gilt: $x_W - x_T = x_H - x_W = 2{,}14$ $y_W - y_T = y_H - y_W = 1{,}96$ oder: $x_w = \frac{x_H + x_T}{2} = \frac{5{,}64 + 1{,}36}{2} = 3{,}5$ $y_w = \frac{y_H + y_T}{2} = \frac{5{,}64 + 1{,}71}{2} = 3{,}68$		2	2
	Summe:	**10**	**26**	**4**