

Landeswettbewerb Mathematik Schuljahr 2024/2025 2. Runde - Lösungen



Rheinland-Pfalz
MINISTERIUM FÜR BILDUNG

Lösung zu Aufgabe 1: (Altersrätsel)

Es gibt 14 Kombinationen für die Darstellung der Zahl 13 als eine Summe mit drei Summanden. Für jede Kombination ist das Produkt bestimmbar:

	Alterszahlen der drei Kinder (Summe = 13)													
K1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4
K2	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	3	4	5	4
K3	11	10	9	8	7	6	9	8	7	6	7	6	5	5
	Produkt der Alterszahlen													
	11	20	27	32	35	36	36	48	56	60	63	72	75	80

Da der Lehrer nach Kenntnis des Produktes der drei Alterszahlen die Antwort immer noch nicht weiß, muss das Produkt eine Zahl sein, die mehrmals vorkommt, also die 36.

Mit dem letzten Hinweis findet der Lehrer die Lösung (2, 2, 9), da es hier im Gegensatz zu (1, 6, 6) ein ältestes Kind gibt, das mind. 1 Jahr älter als die anderen ist.

Lösung zu Aufgabe 2: (Vielfache von Drei und Vier)

a) Vielfaches von 3:

Jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat die Darstellung

$$n = 3m \text{ oder } n = 3m + 1 \text{ oder } n = 3m + 2 \text{ mit } m \geq 0.$$

Daraus folgt:

$$n^2 + 1 = 9m^2 + 1 \text{ oder } n^2 + 1 = 9m^2 + 6m + 2 = 3(3m^2 + 2m) + 2 \text{ oder}$$

$$n^2 + 1 = 9m^2 + 12m + 5 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 2.$$

In keinem der drei Fälle ist $n^2 + 1$ ein Vielfaches von 3.

b) Ist n gerade, dann ist $n^2 + 1$ ungerade und somit kein Vielfaches von 4.

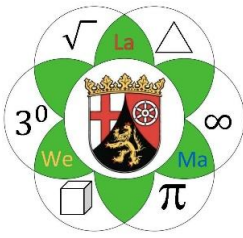
Ist n ungerade, also $n = 2m + 1$ mit $m \geq 0$, dann ist

$$n^2 + 1 = 4m^2 + 4m + 2 = 4(m^2 + m) + 2 \text{ und somit kein Vielfaches von 4.}$$

Lösungsvariante (für Mathe-AG-Profis):

Ihnen ist bekannt, dass das Quadrat jeder natürlichen Zahl nur die Reste 0 oder 1 ($\text{mod } 3$ und auch $\text{mod } 4$) haben kann.

Damit gilt niemals $n^2 \equiv -1 \text{ mod } 3 \text{ oder mod } 4 \Leftrightarrow n^2 + 1 \equiv 0 \text{ mod } 3 \text{ oder mod } 4$.



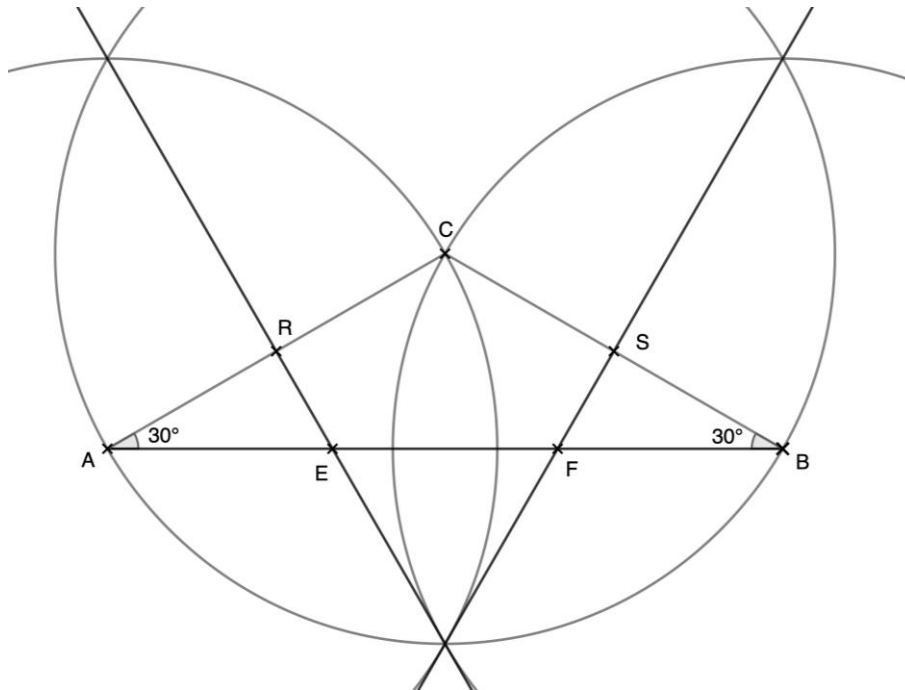
Landeswettbewerb Mathematik
Schuljahr 2024/2025
2. Runde - Lösungen



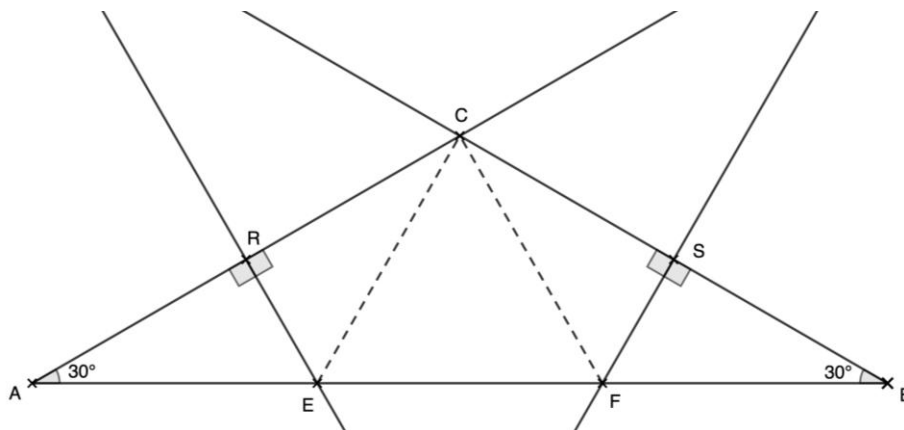
Rheinland-Pfalz
 MINISTERIUM FÜR BILDUNG

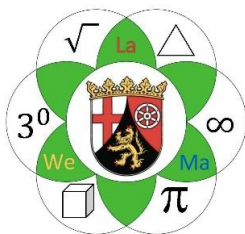
Lösung zu Aufgabe 3: (Gleichschenkliges Dreieck)

a) Die Mittelsenkrechten müssen mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert worden sein.



b)





Landeswettbewerb Mathematik
Schuljahr 2024/2025
2. Runde - Lösungen



Rheinland-Pfalz
 MINISTERIUM FÜR BILDUNG

1. Variante:

ER ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AC}$ und somit Symmetrieachse im Dreieck CAE.

FS ist die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{BC}$ und somit Symmetrieachse im Dreieck BCF.

Folglich gilt:

$$(1) |\overline{AE}| = |\overline{EC}| \text{ und } |\overline{FB}| = |\overline{FC}| \quad \text{und} \quad \angle RCE = \angle FCS = 30^\circ \quad (1 \text{ Pkt.})$$

Aus dem Winkelsummensatz im Dreieck AEC und im Dreieck BCF folgt:

$$\angle CEA = \angle BFC = 120^\circ$$

Aus dem Nebenwinkelsatz folgt $\angle FEC = \angle CFE = 60^\circ$ (1 Pkt.)

und wegen des Winkelsummensatzes im Dreieck EFC: $\angle ECF = 60^\circ$

Das Dreieck EFC ist folglich gleichseitig und mit (1) folgt die Behauptung. (1 Pkt.)

2. Variante

Der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ sei R und der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ sei S.

	Beweisschritt	Begründung
(1)	Die Strecken $\overline{AR}$ und $\overline{RC}$ sind gleich lang. $\angle ARE = \angle ERC = 90^\circ$	Definition der Mittelsenkrechten
(2)	Die Dreiecke AER und ECR sind kongruent.	Kongruenzsatz sws
(3)	$\angle RCE = 30^\circ$	Der Winkel $\angle EAR$ im Dreieck AER entspricht dem Winkel $\angle RCE$ im Dreieck ECR und die Dreiecke sind kongruent.

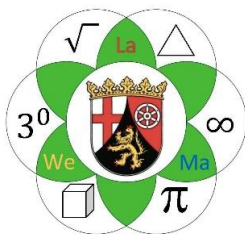
(1 Pkt.)

Die gleiche Argumentation kann im Dreieck BCF erfolgen. Es folgt, dass die Dreiecke CAE und BCF kongruent sind wegen des Kongruenzsatzes sws.

(4) Damit sind die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{FB}$ gleich lang. (1 Pkt.)

(5)	$\angle CEA = \angle BFC = 120^\circ$.	Winkelsummensatz im Dreieck CAE bzw. im Dreieck BCF
(6)	$\angle FEC = \angle CFE = 60^\circ$	Nebenwinkelsatz
(7)	Das Dreieck EFC ist gleichseitig.	Winkelsummensatz im Dreieck EFC
(8)	Die Strecken $\overline{AE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FB}$ sind gleich lang.	(2), (7) und (4)

(1 Pkt.)



Landeswettbewerb Mathematik
Schuljahr 2024/2025
2. Runde - Lösungen



Rheinland-Pfalz
MINISTERIUM FÜR BILDUNG

Lösung zu Aufgabe 4: (Botschaften)

- a) Eine einzelne Botschaft wird genau dann richtig empfangen, wenn jede der fünf übermittelten Ziffern richtig empfangen wird. Dies ist mit der Wahrscheinlichkeit von $\left(\frac{9}{10}\right)^5 \approx 59,05\%$ der Fall.
- b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Quotient $\frac{P_{2r}}{P_2}$ aus der Wahrscheinlichkeit P_{2r} , dass Olaf zweimal die richtige Botschaft empfängt, und der Wahrscheinlichkeit P_2 , dass Olaf zweimal hintereinander dieselbe (nicht notwendigerweise richtige) Botschaft erhält.

Wir betrachten zunächst die erste empfangene Ziffer beim ersten Versenden und die erste empfangene Ziffer beim zweiten Versenden. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide richtig sind, ist $p_{2r} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$; die Wahrscheinlichkeit, dass beide falsch sind, ist $\left(\frac{1}{10}\right)^2$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide übereinstimmen, gleich $p_2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{82}{100}$.

Für die übrigen vier Ziffern erhalten wir entsprechend dieselben Wahrscheinlichkeiten und es folgt $P_{2r} = p_{2r}^5 = \left(\frac{81}{100}\right)^5$ und $P_2 = p_2^5 = \left(\frac{82}{100}\right)^5$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$\frac{P_{2r}}{P_2} = \left(\frac{81}{100}\right)^5 \cdot \left(\frac{100}{82}\right)^5 = \left(\frac{81}{82}\right)^5.$$