Landeswettbewerb Mathematik
Musteraufgaben II
2. Runde

Name: **Klasse:**

<u>Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:</u>
Die Lösungswege müssen mathematisch begründet und übersichtlich dargestellt werden. Nachmessen oder Nachrechnen einiger Beispiele genügt als Lösung nicht.

Aufgabe 1: Straßen

Eine gerade Straße verbindet die acht Dörfer A, B, C, D, E, F, G und H in dieser Reihenfolge.
Von einigen Dörfern ist in der Tabelle angegeben, wie weit sie voneinander entfernt sind. (Angaben in km.) Beispiel: Der Abstand zwischen C und F beträgt 24 km.

a) Bestimme die beiden benachbarten Dörfer, die den kleinsten Abstand voneinander haben.

b) An der Straße liegt eine Tankstelle zwischen zwei benachbarten Dörfern. Der Abstand der Tankstelle von einem dieser zwei Dörfer (in km) ist ganzzahlig und ein Drittel so groß wie der Abstand vom anderen Dorf.
Bestimme die beiden Dörfer, um die es sich handelt.

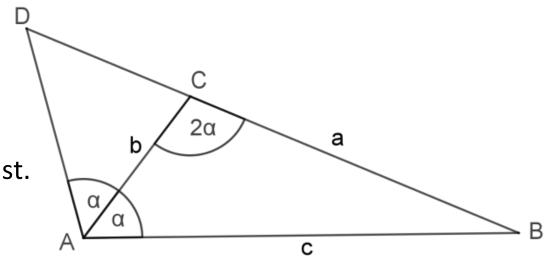
A							
	B						
		C					
27			D				
	26			E			
42		24			F		
			21			G	
		37		23			H

Aufgabe 2: Dreiecke

a) Zeige, dass die Dreiecke ΔABC und ΔABD ähnlich sind.

b) Zeige nun, dass $c^2 = a^2 + ab$ gilt.

c) Bestimme das Längenverhältnis $c : a$ für den Fall, dass $\alpha = 45°$ ist.



Aufgabe 3: Quersumme

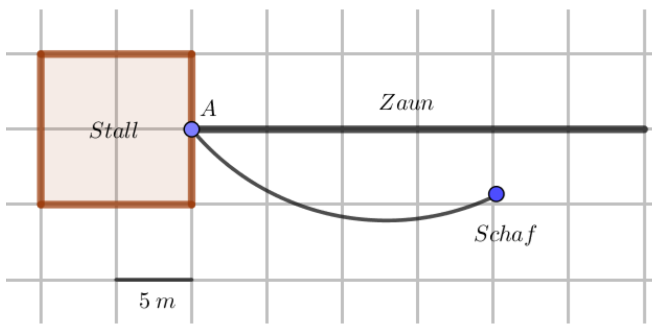
Von einer n-stelligen natürlichen Zahl z_0 wird die Einerziffer weggelassen. Von der so entstandenen (n-1)-stelligen Zahl z_1 wird wiederum die Einerziffer weggelassen, was zur (n-2)-stelligen natürlichen Zahl z_2 führt. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis man zu der einstelligen Zahl z_{n-1} gelangt. Dadurch entstehen nach und nach die <u>neuen</u> Zahlen z_1 bis z_{n-1}.
Nun wird die Summe dieser n-1 <u>neuen</u> Zahlen mit 9 multipliziert. Abschließend wird das so entstandene Produkt von der ursprünglichen Zahl z_0 subtrahiert.

a) Weise für $z_0 = 4813$ nach, dass das Ergebnis dieses Verfahrens die Quersumme von z_0 ist.

b) Zeige, dass das Ergebnis des Verfahrens für jede beliebige 6-stellige natürliche Zahl z_0 die Quersumme von z_0 ist.

Aufgabe 4: Schafe

An der Ostwand eines Schafstalls endet mittig ein Zaun, den das Schaf nicht überwinden kann. Ein Schaf grast südlich dieses Zauns. Es ist mit einem 25 m langen (dünnen) Seil genau an der Stelle A angepflockt, siehe Skizze.
Das Schaf frisst sämtliches Gras, das es erreichen kann.



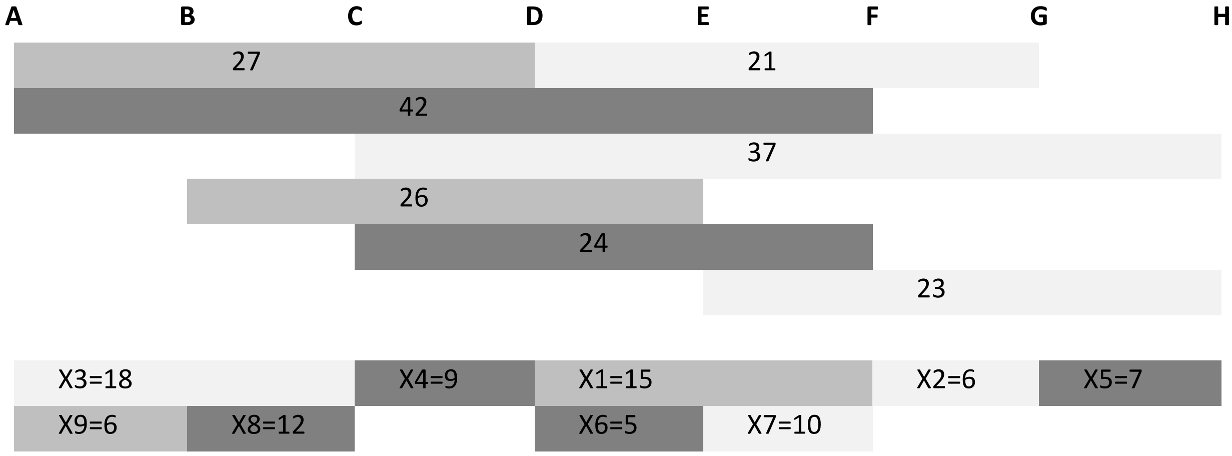
a) Erstelle eine saubere Zeichnung in geeignetem Maßstab, aus der hervorgeht, welche Fläche das Schaf maximal abgrasen kann.

b) Berechne den Inhalt der abgrasbaren Fläche in m^2.

c) Der Zaun wird jetzt beseitigt. Dadurch kann das Schaf in beiden Richtungen um den Stall laufen. Berechne auch für diesen Fall den Inhalt der abgrasbaren Fläche in m^2.

<u>Lösungen zu Aufgabe 1: Straßen</u> (Die Einheit km wird im Folgenden weggelassen)

a) Aus der Entfernungstabelle entnimmt man folgende Entfernungen und berechnet die Entfernungen X1, X2, …, X9 in dieser Reihenfolge:



Daraus erhält man unmittelbar die Abstände jeweils zweier benachbarter Dörfer:

A ←6→ B ←12→ C ←9→ D ←5→ E ←10→ F ←6→ G ←7→ H

Die Dörfer D und E haben den kleinsten Abstand, nämlich 5 km, voneinander.

b) Der Abstand der Tankstelle von einem der benachbarten Dörfer sei x (x ganzzahlig); dann ist ihr Abstand vom anderen Dorf 3x und die beiden gesuchten Dörfer haben den Abstand 4x. Da x ganzzahlig ist, muss der Abstand der gesuchten Dörfer durch vier teilbar sein. Dies ist nur bei B und C der Fall. Daher befindet sich die Tankstelle zwischen B und C.

<u>Lösung zu Aufgabe 2: Dreiecke</u>

a) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in ihren Winkeln übereinstimmen.
Wegen des Winkelsummensatzes genügt es sogar zu zeigen, dass die beiden Dreiecke in zweien ihrer Winkel übereinstimmen.
Der Winkel β bei B gehört zu beiden Dreiecken.
Nach Konstruktion gilt ∢ACB = 2α = ∢BAD.

b) Da die beiden Dreiecke ähnlich sind**,** folgt aus der Konstruktion und den Überlegungen zu 1

∢ ADC = ∢ BAC = α

[*Variante:* ∢ DCA = 180° - 2α (Nebenwinkel) und damit gilt

∢ ADC = 180° - α – (180° - 2 α) = α]

Daher ist ΔACD gleichschenklig mit $|\overline{CD}| = |\overline{AC}| = b$ und somit $|\overline{BD}| = a + b$.
Wegen der Ähnlichkeit von ΔABC und ΔABD gilt:

$$c:(a+b) = a:c \Leftrightarrow c^2 = a \cdot (a+b) \Leftrightarrow c^2 = a^2 + ab$$

c) Für $\alpha = 45°$ ist ΔABC rechtwinklig, und da einer der anderen Winkel 45° beträgt, auch gleichschenklig. Also ist a = b.
Daher gilt nach dem Satz von Pythagoras: $c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow c:a = \sqrt{2}:1$
[*Variante:* c ist die Diagonale in einem Quadrat mit der Kantenlänge a.
Daher gilt $c = \sqrt{2}a \Rightarrow c:a = \sqrt{2}:1$]

<u>Lösung zu Aufgabe 3: Quersumme</u>

a) $z_0 = 4813 \rightarrow z_1 = 481$, $z_2 = 48$, $z_3 = 4 \rightarrow 9 \cdot (z_1 + z_2 + z_3) = 9 \cdot 533 = 4797$
4813 – 4797 = 16, was der Quersumme von 4813 entspricht.

b) Die 6-stellige Ausgangszahl z_0 lässt sich folgendermaßen darstellen:
$z_0 = a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$

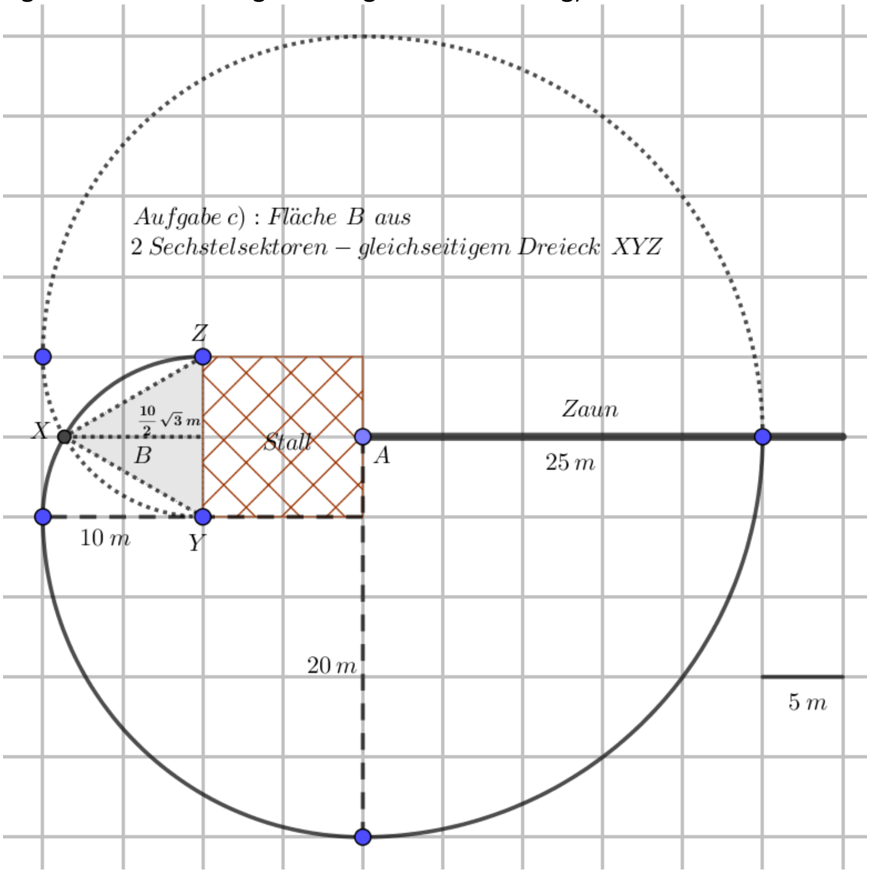
Die sich hieraus ergebenden Zahlen z_1 bis z_5 lassen sich entsprechend folgendermaßen darstellen:
$z_1 = a_5 \cdot 10^4 + a_4 \cdot 10^3 + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10^1 + a_1$
$z_2 = a_5 \cdot 10^3 + a_4 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^1 + a_2$
$z_3 = a_5 \cdot 10^2 + a_4 \cdot 10^1 + a_3$
$z_4 = a_5 \cdot 10^1 + a_4$
$z_5 = a_5$

Hieraus erhält man die Summe
$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = a_5 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 1) + a_4 \cdot (10^3 + 10^2 + 10^1 + 1) + a_3 \cdot (10^2 + 10^1 + 1) + a_2 \cdot (10^1 + 1) + a_1 \cdot 1$
$= 11.111 \cdot a_5 + 1.111 \cdot a_4 + 111 \cdot a_3 + 11 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1$

Wird diese Summe nun verneunfacht, erhält man offensichtlich:
$9 \cdot (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5) = 99\,999 \cdot a_5 + 9\,999 \cdot a_4 + 999 \cdot a_3 + 99 \cdot a_2 + 9 \cdot a_1$ Für die abschließend gesuchte Differenz ergibt sich somit:
$z_0 - 9 \cdot (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$
$= a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 - (9\,999 \cdot a_5 + 9\,999 \cdot a_4 + 999 \cdot a_3 + 99 \cdot a_2 + 9 \cdot a_1)$
$= a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$,
was genau der Quersumme von z_0 entspricht.

<u>Lösung zu Aufgabe 4: Schafe</u>

a) Die darzustellende Fläche besteht aus drei Viertelkreisen mit den Radien 25m, 20m und 10m (durchgezogene Viertelkreisbögen in folgender Abbildung).



b) Die gesuchte Fläche ist die Summe der Viertelkreissektoren, daher gilt:

$$A = \frac{1}{4} \cdot (25^2 + 20^2 + 10^2) \cdot \pi m^2 = \frac{1125\pi}{4} m^2 \approx 884 m^2$$

c) Die gesuchte Fläche entsteht durch Vereinigung der Fläche aus a) mit ihrem Spiegelbild an der Zaunachse. Diese beiden Flächen überschneiden sich in einer Fläche *B*, die sich mit Hilfe von zwei Sechstelkreissektoren *C* mit dem Radius 10*m* und einem innenliegenden gleichseitigen Dreieck *D* der Seitenlänge 10*m* berechnen lässt (siehe Abbildung oben):

$$B = 2 \cdot C - D = \left(2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 10^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{10}{2}\sqrt{3}\right) m^2 = \left(\frac{100}{3}\pi - 25\sqrt{3}\right) m^2 \approx 61 m^2.$$

Für den Gesamtflächeninhalt ergibt sich damit:

$$G = 2 \cdot A - B = \left(\frac{3175}{6}\pi + 25\sqrt{3}\right) m^2 \approx 1706 m^2$$