Handlungsorientierte Aufgabenbeispiele für den Mathematikunterricht

2024

Simone Bast

Dieses Dokument enthält handlungsorientierte Aufgabenbeispiele für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II an berufsbildendenden Schulen. Das Dokument gliedert sich in drei Kapitel: Aufgabenbeispiele ohne Differentialrechnung, mit Differentialrechnung und mit Differential- und Integralrechnung. Die einzelnen Kapitel gliedern sich wiederum in Unterkapitel zu den einzelnen Funktionenklassen.

Ein Projekt für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II an berufsbildenden Schulen.

Inhalt

1 Aufgabenbeispiele ohne Differential- und Integralrechnung

1.1 Quadratische Funktionen

1.1.1 Weltrekord beim Diskuswurf?

Situationsbeschreibung

Eine Amateuraufnahme vom Einwerfen der Diskuswerfer bei den Olympischen Spielen in London zeigt angeblich einen Weltrekordwurf des deutschen Werfers Robert Harting.

Technikern ist es gelungen, drei Punkte der parabelförmigen Flugkurve dieses Wurfes zu extrahieren:

P1: 40m weit; 29,75m hoch

P2: 50m weit; 26,75m hoch

P3: 65m weit; 14,75m hoch

Analysieren Sie die Flugkurve des Diskus von Robert Harting.

1.1.1 Weltrekord beim Diskuswurf?

Fakten, Fakten, Fakten

Der Diskuswurf ist eine olympische Disziplin der Leichtathletik, bei der eine linsenförmige Scheibe möglichst weit zu werfen ist. Als Wettkampf gibt es den Diskuswurf seit der Antike (sog. Diskos).

Seit 1907 werfen die Männer mit einem kreisrunden, zwei Kilogramm schweren Diskus.

Der Weltrekord wird seit 1986 von Jürgen Schult mit einer Weite von 74,08m gehalten.[1]

Hinweiskarte

- Funktionsgleichung für die Flugkurve?
  Funktionsgleichung der quadratischen Funktion mit Hilfe der drei gegebenen Punkte aufstellen.
- Wie sieht die Flugkurve aus?
  Skizze des Funktionsgraphen auf der Basis einer Wertetabelle.
- Wo landete der Diskus?
  Nullstellen berechnen.
- Auf welcher Höhe wurde der Diskus abgeworfen?
  y-Achsenschnittpunkt berechnen.
- Wo lag der höchste Punkt der Flugkurve?
  Scheitelpunktform.

1.1.1 Weltrekord beim Diskuswurf?

Lösungskarte

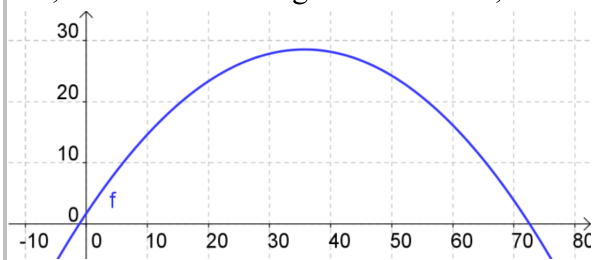
Die Funktionsgleichung, die die Flugkurve des Diskus beschreibt, lautet:

$f(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}5x + 1{,}75.$

Der Diskus landet bei einer Weite von 76,15m. Somit ist es Harting gelungen, den Weltrekord von Jürgen Schult zu übertreffen.

Der Diskus wird auf einer Höhe von 1,75m abgeworfen.

Den höchsten Punkt erreicht der Diskus mit 37,5m nach einer Flugstrecke von 29,88m.



1.1.1 Weltrekord beim Diskuswurf?

[1] Siehe Wikipedia, 30.03.2013

1.1.2 Olympische Verwirrung 1

Situationsbeschreibung

Nachdem bei den Olympischen Spielen in London beim Hammerwurf Wettbewerb der Damen die Weitenmessung versagte, analysierten Wissenschaftler der Sporthochschule in Köln den Wurf von Betty Heidler, der vom Kampfgericht zunächst mit einer Weite von 72,34m angegeben wurde. Die Wissenschaftler fanden heraus, dass die Funktion

$$f(x) = -0{,}015x^2 + 1{,}13x + 2{,}08$$

die Flugkurve von Betty Heidlers Hammer bei diesem Wurf beschreibt.

1.1.2 Olympische Verwirrung

Fakten, Fakten, Fakten

Kurz nach der Beendigung des olympischen Hammerwurffinales der Damen sah das Ergebnis folgendermaßen aus:

Gold gewann die Russin Tatjana Lysenko mit 78,18 Metern vor Anita Wlodarczyk aus Polen (77,60). Bronze sicherte sich zunächst Zhang Wenxiu aus China mit 76,34. Sie sollte es nicht behalten.[2]

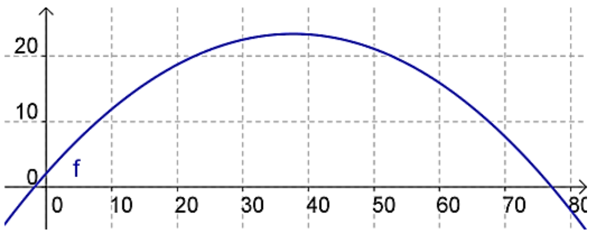
Hinweiskarte

- *Wie weit flog der Hammer von Betty Heidler wirklich?*
  Berechnung der Nullstellen.
- *Wie sieht die Flugkurve des Hammers aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.

1.1.2 Olympische Verwirrung

Lösungskarte

Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x_1 = -1{,}8$ und $x_2 = 77{,}13$. Für die Realsituation spielt nur die positive Nullstelle eine Rolle. Betty Heidler gewann damit Bronze in diesem olympischen Finale.



1.1.2 Olympische Verwirrung

[2] Siehe: http://www.welt.de/sport/olympia/article108572700/Hammerwurf-Skandal-Doch-noch-Bronze-fuer-Heidler.html

1.1.3 Flugkurvenvergleich

Situationsbeschreibung

Sportwissenschaftler stellten kürzlich folgende These auf: „Je höher der höchste Punkt der Flugkurve der Kugel beim Kugelstoßen ist, desto weiter fliegt die Kugel.“

Überprüfen Sie diese These anhand der folgenden Funktionen, die drei unterschiedliche Versuche einer amerikanischen Kugelstoßerin beschreiben:

$$f_1(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}8x + 1{,}78$$

$$f_2(x) = -0{,}08x^2 + 1{,}2x + 1{,}78$$

$$f_3(x) = -0{,}12x^2 + 1{,}7x + 1{,}78$$

1.1.3 Flugkurvenvergleich

Fakten, Fakten, Fakten

Das Kugelstoßen ist eine olympische Disziplin der Leichtathletik. Ziel ist es, die 4kg (bzw. 7,25kg bei den Männern) schwere Kugel möglichst weit zu stoßen. Der Ring mit einem Durchmesser von 2,135m dient hierbei als Anlauffläche.

Hinweiskarte

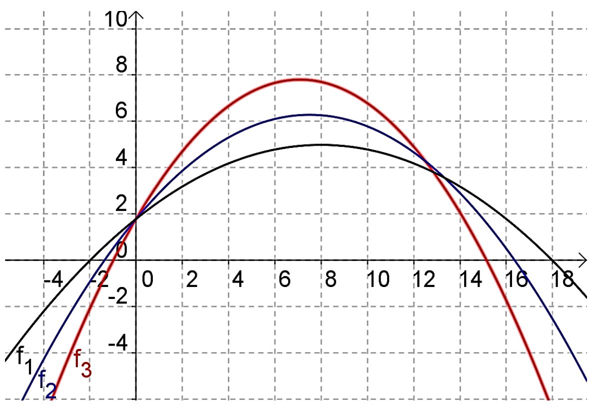
- *Wie weit waren die einzelnen Stöße?*
  Nullstellen.
- *Wo lag jeweils der höchste Punkt der Flugkurve?*
  Scheitelpunktform.
- *Vergleich der Flugkurven?*
  Skizze der drei Funktionsgraphen.
- *Bestätigung oder Widerlegung der These?*
- *Was könnten weitere Faktoren sein, die Einfluss auf die Weite nehmen?*
  Schwerkraft, Geschwindigkeit,...

1.1.3 Flugkurvenvergleich

Lösungskarte

Stoß	Weite	Höchster Punkt
1	17,98m	(8 | 4,98)
2	16,36m	(7,5 | 6,28)
3	15,15m	(7,08 | 7,80)

Die These ist nicht korrekt: Der weiteste Stoß war der erste mit 17,98m, während bei diesem Stoß der höchste Punkt der Flugkurve mit 4,98m am niedrigsten war.



1.1.3 Flugkurvenvergleich

1.1.4 Benzinverbrauch 1

Situationsbeschreibung

Der Benzinverbrauch eines Mittelklassewagens ist abhängig von seiner Geschwindigkeit. Wissenschaftliche Untersuchungen zeigen, dass der Zusammenhang zwischen der gefahrenen Geschwindigkeit (x in km/h) und dem Benzinverbrauch ($f(x)$ in Litern pro 100km) durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann.

Bei einer Testfahrt wurden folgende Messwerte festgestellt:

Geschwindigkeit in km/h	30	70	120
Verbrauch in Liter/100km	7,2	6,4	9,8

Analysieren Sie den Verlauf und geben Sie eine Empfehlung für eine spritsparende Fahrweise an.

1.1.4 Benzinverbrauch

Fakten, Fakten, Fakten

Der Benzinverbrauch von Autos steigt mit der Geschwindigkeit. Das liegt daran, dass mit wachsender Geschwindigkeit der Luftwiderstand aller Körper, also auch eines Autos, immer größer wird und ein großer Teil des Benzins zur Überwindung des Luftwiderstandes benötigt wird.

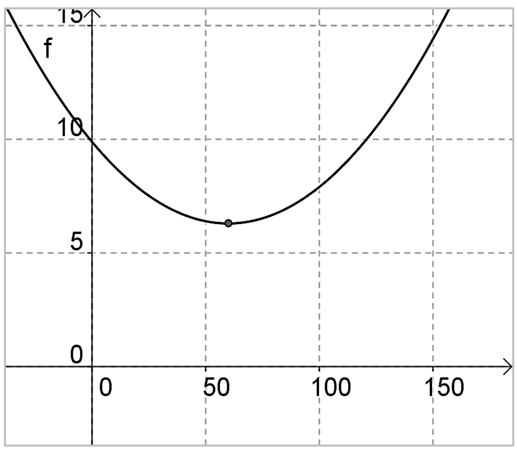
Hinweiskarte

- *Funktionsgleichung der quadratischen Funktion?*
  Lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten aufstellen und mit Gauß-Algorithmus lösen.
- *Bei welcher Geschwindigkeit ist der Verbrauch minimal?*
  Scheitelpunktform.
- *Wie sieht der Benzinverbrauch (innerhalb eines realistischen Definitionsbereiches) aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Beschreibung des Graphen und Empfehlung?*
  Hoher Verbrauch bei sehr geringen und bei sehr hohen Geschwindigkeiten, niedrigster Verbrauch im Scheitelpunkt.

1.1.4 Benzinverbrauch

Lösungskarte

Für eine spritsparende Fahrweise empfiehlt sich eine Fahrweise mit Geschwindigkeiten um den Scheitelpunkt. Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}12x + 9{,}9$ und die entsprechende Scheitelpunktform lautet $f(x) = 0{,}001 \cdot (x - 60)^2 + 6{,}3$. Damit liegt der Scheitelpunkt bei S(60 | 6,3). Eine besonders umweltschonende Fahrweise ergibt sich also bei einer Fahrt mit 60 km/h mit einem Verbrauch von 6,3 Litern auf 100 km.



1.1.4 Benzinverbrauch

1.1.5 Benzinverbrauch 2

Situationsbeschreibung

Der Benzinverbrauch eines Mittelklassewagens ist abhängig von seiner Geschwindigkeit. Wissenschaftliche Untersuchungen zeigen, dass der Zusammenhang zwischen der gefahrenen Geschwindigkeit (x in km/h) und dem Benzinverbrauch ($f(x)$ in Litern pro 100km) durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann:

$$f(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}12x + 9{,}9$$

Analysieren Sie den Verlauf und geben Sie eine Empfehlung für eine spritsparende Fahrweise an.

1.1.5 Benzinverbrauch 2

Fakten, Fakten, Fakten

Der Benzinverbrauch von Autos steigt mit der Geschwindigkeit. Das liegt daran, dass mit wachsender Geschwindigkeit der Luftwiderstand aller Körper, also auch eines Autos, immer größer wird und ein großer Teil des Benzins zur Überwindung des Luftwiderstandes benötigt wird.

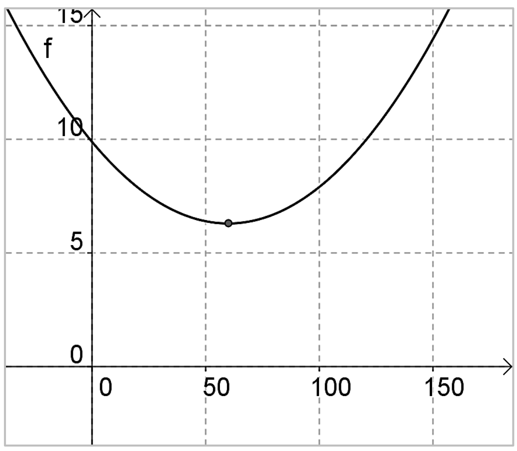
Hinweiskarte

- *Bei welcher Geschwindigkeit ist der Verbrauch minimal?*
  Scheitelpunktform.
- *Wie sieht der Benzinverbrauch (innerhalb eines realistischen Definitionsbereiches) aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Beschreibung des Graphen und Empfehlung?*
  Hoher Verbrauch bei sehr geringen und bei sehr hohen Geschwindigkeiten, niedrigster Verbrauch im Scheitelpunkt.

1.1.5 Benzinverbrauch 2

Lösungskarte

Für eine spritsparende Fahrweise empfiehlt sich eine Fahrweise mit Geschwindigkeiten um den Scheitelpunkt. Die Scheitelpunktform der Funktion lautet $f(x) = 0{,}001 \cdot (x - 60)^2 + 6{,}3$. Damit liegt der Scheitelpunkt bei S(60 | 6,3). Eine besonders umweltschonende Fahrweise ergibt sich also bei einer Fahrt mit 60 km/h mit einem Verbrauch von 6,3 Litern auf 100 km.



1.1.5 Benzinverbrauch 2

1.1.6 Benzinverbrauch[3]

Situationsbeschreibung

Die Messung von Geschwindigkeit und Benzinverbrauch bei einem Kleinwagen hat ergeben, dass der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit ($v\ in\ km/h$) und Benzinverbrauch ($B\ in\ l/100km$) durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann:

$$B(v) = \frac{4}{10000} \cdot v^2 - \frac{24}{1000} \cdot v + 3{,}36$$

Geben Sie eine mathematisch fundierte Empfehlung für eine besonders umweltschonende Fahrweise ab.

1.1.6 Benzinverbrauch

Fakten, Fakten, Fakten

Der Benzinverbrauch von Autos steigt mit der Geschwindigkeit. Das liegt daran, dass mit wachsender Geschwindigkeit der Luftwiderstand aller Körper, also auch eines Autos, immer größer wird und ein großer Teil des Benzins zur Überwindung des Luftwiderstandes benötigt wird.

Hinweiskarte

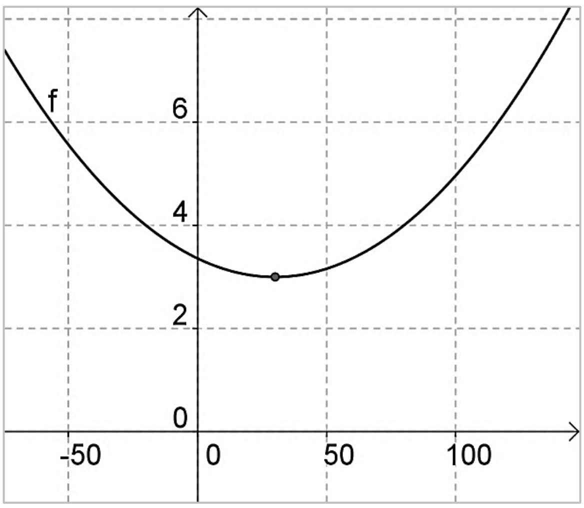
- *Beantwortung der Frage: Wann ist der Benzinverbrauch minimal? Hierzu notwendig:*
- *Berechnung des Minimums der Funktion.* Überführung in Scheitelpunktform und minimalen Verbrauch und zugehörige Geschwindigkeit ablesen.
- *Skizze des Funktionsgraphen.*

1.1.6 Benzinverbrauch

Lösungskarte

Die Funktion in Scheitelpunktform:

$f(x) = \frac{4}{10000} \cdot (v-30)^2 + 3$. Der Scheitelpunkt liegt also bei S(30 | 3). Eine umweltschonende Fahrweise ergibt sich also bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h mit einem Verbrauch von 3 Litern auf 100 km.



1.1.6 Benzinverbrauch

[3] http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1fu/qf/qf_aa16aA.pdf

1.1.7 Raketenstart

Situationsbeschreibung

Durch Auswertung von Messungen der Ariane 4 Rakete wurde festgestellt, dass sich der Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Sekunden) der Höhe h der Rakete über dem Startplatz (in Metern) bis zum Verlassen der Erdatmosphäre durch eine quadratische Funktion beschreiben lässt. Die folgende Tabelle zeigt die Messwerte:

Zeit t in sec	0	20	40
Höhe h in m	0	760	3040

1.1.7 Raketenstart

Fakten, Fakten, Fakten

Die Erdatmosphäre ist die gasförmige Hülle oberhalb der Erdoberfläche. Sie stellt eine der Geosphären dar und ihr Gasgemisch ist durch einen hohen Anteil an Stickstoff und Sauerstoff und somit oxidierende Verhältnisse geprägt. Als obere Begrenzung der Erdatmosphäre kann eine Höhe von ca. 100 km angenommen werden.

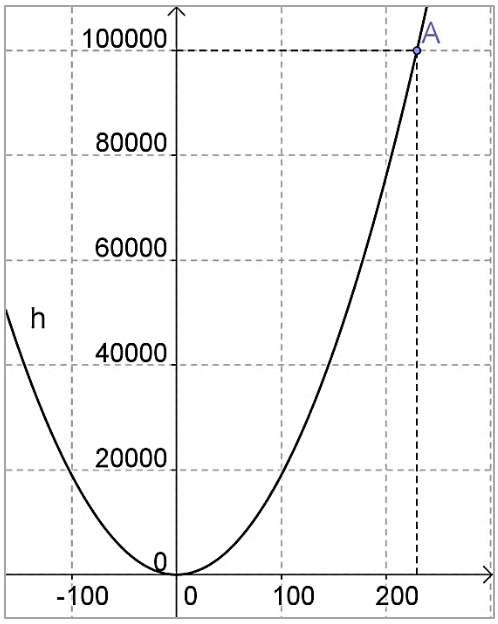
Hinweiskarte

- *Beantwortung der Frage: Nach welcher Zeit verlässt die Rakete die Erdatmosphäre? Hierzu nötig:*
- *Wie sieht die Funktionsgleichung aus?* Bestimmung der Funktionsgleichung.
- *Nach welcher Zeit wird die Erdatmosphäre verlassen?* Funktionsgleichung mit 100 km gleichsetzen und nach t auflösen (Achtung! Höhe in der Wertetabelle ist in m und nicht in km angegeben).
- *Skizze des Graphen.*

1.1.7 Raketenstart

Lösungskarte

Die Funktionsgleichung $f(t) = 1{,}9t^2$ beschreibt den Zusammenhang zwischen der Zeit t und der Höhe h der Ariane 4 Rakete. Die Rakete verlässt die Erdatmosphäre nach 229,416 Sekunden (≈ 3,82 Minuten).



1.1.7 Raketenstart

1.1.8 James Bond[4]

Situationsbeschreibung

Ein Hubschrauber der Royal Airforce schwebt 2000 m über dem Erdboden. Der Agent seiner Majestät, James Bond, sitzt am Steuer und versucht eine Bombe zu entschärfen. Auf seinem Rücken befindet sich ein Fallschirm.

Hinter ihm kämpft seine Freundin Beautyfee mit Goldfinger. Dieser gewinnt den Kampf und wirft Beautyfee aus dem Hubschrauber. Ohne Fallschirm fliegt sie ihrem scheinbar sicheren Tod entgegen. Agent 007 lässt die Bombe Bombe sein, bringt den Hubschrauber zum Rückenflug und katapultiert sich mit dem Schleudersitz mit 35 m/s nach unten aus dem Hubschrauber. Nur 3 Sekunden sind vergangen, seit Beautyfee aus dem Hubschrauber geworfen wurde.

Wenige Sekunden später explodiert der Hubschrauber mit Goldfinger an Bord.

1.1.8 James Bond

Fakten, Fakten, Fakten

Freier Fall:

Zur Beschreibung des freien Falles verwendet man die Formeln der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die Strecke, die ein Körper während des freien Falles zurückgelegt wird beschrieben durch: $h(t) = \frac{g \cdot t^2}{2}$ (h: Fallstrecke in m; g: Erdbeschleunigung in $\frac{m}{s^2}$; t: Fallzeit in sec).

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

Ein Körper wird von der Höhe h_0 mit der Geschwindigkeit v_0 zum Zeitpunkt t = 0 senkrecht emporgeschossen. Für die Höhe h über dem Erdboden in Abhängigkeit von der Zeit t gilt: $h(\,t\,) = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$ mit g = 9,81 m/s2 (g ... Erdbeschleunigung).

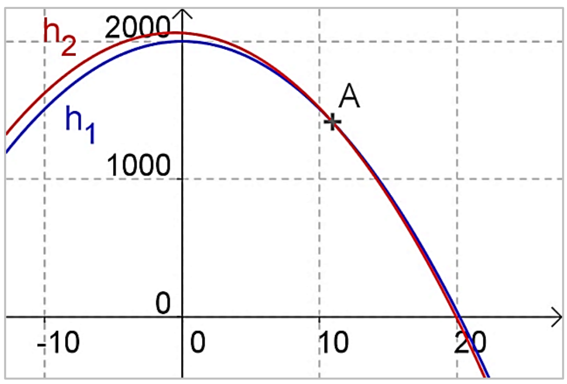
Hinweiskarte

- *Kann 007 seine Freundin einholen und mit ihr mit dem Fallschirm zu Boden schweben, um dann in einem Heuhaufen gelandet, unbeobachtet von der Welt zu sein?*
- *Funktion, die den Fall von Beautyfee beschreibt?*
  Freier Fall.
- *Funktion, die den Fall von 007 beschreibt?*
  Gleichmäßig beschleunigte Bewegung.
- *Treffpunkt der beiden?*
  Beide Funktionen gleichsetzen und nach x auflösen.
- *Skizze der Funktionsgraphen.*

1.1.8 James Bond

Lösungskarte

Die Funktion, die den Fall von Beautyfee beschreibt lautet: $h_1(t) = 2000 - \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2$. Der Fall von 007 wird beschrieben durch $h_2(t) = 2000 - 35 \cdot (t-3) - \frac{9{,}81}{2} \cdot (t-3)^2$. Die beiden treffen sich nach einer Fallzeit von 10,9255sec in einer Höhe von 1414,51m.



1.1.8 James Bond

[4] http://www.acdca.ac.at/material/bsp/e0111.htm

1.2 Ganzrationale Funktionen

1.2.1 Landschaftsquerschnitt

Situationsbeschreibung

Ein Landschaftsquerschnitt wird im Intervall [0;8] beschrieben durch die Funktion

$$f(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}15x^2 + 3x$$

Hierbei ist x die Entfernung in 100m und f die Höhe über NN in 100m.

Analysieren Sie diesen Landschaftsquerschnitt und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

1.2.1 Landschaftsquerschnitt

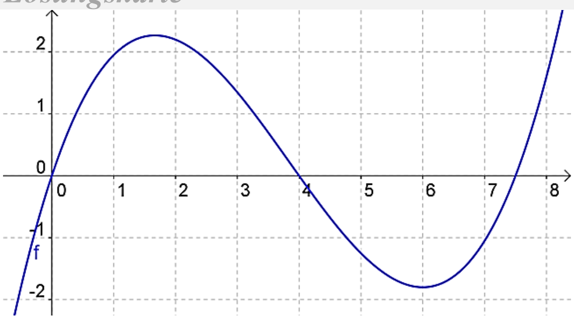
Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht der Landschaftsquerschnitt aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen auf der Basis einer Wertetabelle.
- *Von was ist dieser Landschaftsquerschnitt?*
- *Wie hoch ist der Berg?*
  Annähern mittels Wertetabelle.
- *Wie tief ist das Tal/ der See?*
  Annähern mittels Wertetabelle.
- *Wie breit ist der Berg? Wie breit ist das Tal/ der See?*
  Nullstellen mittels Ausklammern und pq-Formel.

1.2.1 Landschaftsquerschnitt

Lösungskarte



Der Landschaftsquerschnitt könnte ein Berg-Tal-Relief oder ein Berg-See-Relief sein. Der Berg ist etwa 227m hoch, der See etwa 180m tief. Der Durchmesser des Berges beträgt 400m (auf einer Höhe von 0m über NN). Von dem einen Ufer des Sees zum anderen Ufer sind es 750m.

1.2.1 Landschaftsquerschnitt

1.2.2 Gestrandet[5]

Situationsbeschreibung

Durch vulkanische Aktivitäten haben sich im Laufe der Jahrtausende in der Karibik zwei neue Inseln gebildet. Das Relief der Inseln wird unter und über dem Meeresspiegel annähernd beschrieben durch folgende Funktion:

$$f(x) = -\frac{2}{55}x^4 + \frac{25}{88}x^2 - \frac{11}{160}$$

Hierbei ist x die Entfernung in 100m und f die Höhe über NN in 100m.

Ein Überlebender einer Flugzeugkatastrophe ist auf einer der beiden Inseln gestrandet, auf der es kein Süßwasser gibt.

Beurteilen Sie die Überlebenschance des Gestrandeten für den Fall, dass es auf der anderen Insel Süßwasser gibt. Begründen Sie Ihre Aussagen.

1.2.2 Gestrandet

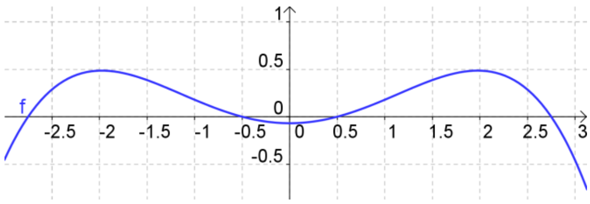
Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht das Relief der beiden Inseln aus?*
  Skizze auf der Basis einer Wertetabelle.
- *Wie weit sind die beiden Inseln voneinander entfernt?*
  Nullstellen über Substitution.
- *Kann ein normal sportlicher Mensch von der einen zur anderen Insel schwimmen?*
  Ist die Entfernung zwischen beiden Inseln schwimmend zu überwinden?
- *Wie lange würde man brauchen, um von einer zur anderen Insel zu schwimmen?*
  Annahme einer Schwimmgeschwindigkeit eines normalen Menschen (z.B. 2 km/h), Umrechnung auf die Entfernung zwischen den beiden Inseln.
- *Wie tief ist das Wasser zwischen beiden Inseln? Könnte also ein Nichtschwimmer „zu Fuß" die Entfernung zwischen beiden Inseln überwinden?*
  Annäherung mittels Wertetabelle.
- *Wie hoch sind die Inseln?*
  Annäherung mittels Wertetabelle.

1.2.2 Gestrandet

Lösungskarte



Die beiden Inseln sind 100m voneinander entfernt. Ein normal sportlicher Mensch kann diese Entfernung schwimmend zurücklegen. Nimmt man eine Schwimmgeschwindigkeit von 2 km/h an, so würde der Gestrandete für die 100m 3min brauchen. Das Wasser zwischen beiden Inseln ist am tiefsten Punkt 7m tief. Ein Nichtschwimmer könnte also die Entfernung zwischen beiden Inseln nicht überwinden. Da der Graph der Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, sind beide Inseln gleich hoch. Der höchste Punkt liegt jeweils bei 49m.

1.2.2 Gestrandet

[5] Idee: Till Dennier: Anwendungsaufgaben zu Polynomfunktionen, Dennier Eigenverlag

1.2.3 Wasserrutsche

Situationsbeschreibung

Das Cascade Erlebnisbad in Bitburg plant den Bau einer Steilrutsche. Der Verlauf der Rutsche kann annähernd durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben werden:

$$f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$$

Hierbei ist x die Entfernung in m und f die Höhe der Rutsche über der Wasseroberfläche in m. Analysieren Sie den Verlauf der Wasserrutsche und geben Sie eine mathematisch begründete Einschätzung ab, ob der Bau der Rutsche in dieser Form Sinn macht oder nicht.

1.2.3 Wasserrutsche

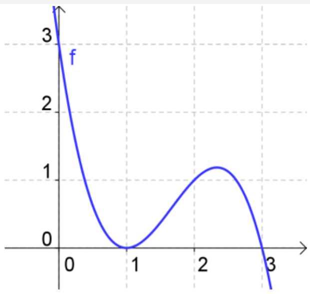
Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht die Steilrutsche aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen auf der Basis einer Wertetabelle.
- *Wie hoch ist der Einstieg in die Rutsche?*
  y-Achsenschnittpunkt berechnen/ablesen.
- *Nach welcher Entfernung befindet man sich im Wasser?*
  Nullstellen mittels Polynomdivision.
- *Wie hoch ist der Peak im letzten Drittel der Rutsche?*
  Annäherung mittels Wertetabelle.
- *Macht es Sinn, die Rutsche in dieser Weise zu bauen?*
  Nein, man würde wahrscheinlich beim Rutschen nicht über den Peak hinwegkommen.

1.2.3 Wasserrutsche

Lösungskarte



Der Einstieg in die Rutsche liegt auf einer Höhe von 3m. Nach einer Entfernung von 3m befindet man sich im Wasser. Der Peak im letzten Drittel der Rutsche ist 1,2m hoch. Es macht keinen Sinn die Rutsche so zu bauen, da nicht gewährleistet ist, dass jeder Badbesucher den Peak im letzten Drittel der Rutsche überwinden kann.

1.2.3 Wasserrutsche

1.2.4 Wildwasserbahn

Situationsbeschreibung

Eine der größten Attraktionen des *Phantastic Park* in Arizona ist die *Wild Water Cruise.* Im Intervall [-3; 1,5] wird das Höhenprofil (in m) dieser Wildwasserbahn durch eine ganzrationale Funktion beschrieben:

$$f(x) = -0{,}7x^4 - 1{,}6x^3 + 2x^2 + 1{,}5x \quad (x \text{ in } m)$$

Die x-Achse stellt die Wasseroberfläche dar.

Beurteilen Sie den Spaßfaktor dieses Streckenabschnittes der Wildwasserbahn an einem für Arizona typischen heißen Sommertag.

1.2.4 Wildwasserbahn

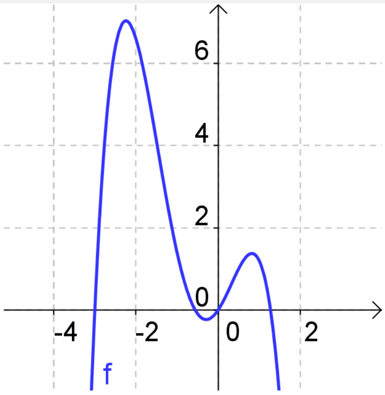
Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht die Wildwasserbahn auf diesem Streckenabschnitt aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen auf der Basis einer Wertetabelle.
- *An welcher Stelle befindet sich die Bahn im Wasser?*
  Nullstellen mittels Ausklammern und Polynomdivision.
- *Wie tief befindet sich die Bahn im Wasser?*
  Annäherung mittels Wertetabelle.
- *Was ist der höchste Punkt der Bahn auf diesem Streckenabschnitt?*
  Annäherung mittels Wertetabelle.
- *Spaßfaktor?*
  Die Bahn ist steil und man wird an einer Stelle des Streckenabschnittes nass, also ist der Spaßfaktor gegeben.

1.2.4 Wildwasserbahn

Lösungskarte



1.2.4 Wildwasserbahn

1.2.5 Wirkstoffkonzentration im Blut

Situationsbeschreibung

Innerhalb einer Studie soll die Konzentration eines oral zu verabreichenden Medikamentes im Blut untersucht werden. In der Zeitspanne zwischen der Verabreichung des Medikamentes bis zum vollständigen Abbau des Medikamentes wird die Wirkstoffkonzentration im Blut der Probanden (in $\frac{mg}{l}$) durch eine ganzrationale Funktion f beschrieben:

$$f(t) = 0{,}015t^3 - 0{,}6t^2 + 6t \quad (t \text{ in } h)$$

Untersuchen Sie den Verlauf der Konzentration des Wirkstoffes im Blut der Probanden.

1.2.5 Wirkstoffkonzentration im Blut

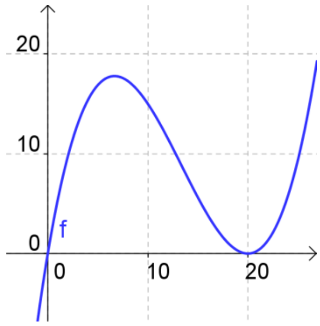
Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wann beginnt die Aufnahme des Wirkstoffes im Blut?*
  Nullstellen mittels Ausklammern und pq-Formel.
- *Wann ist kein Wirkstoff mehr im Blut vorhanden?*
  Nullstellen.
- *Wann ist die Konzentration am höchsten?*
  Annäherung mittels Wertetabelle.
- *Wie sieht der Konzentrationsverlauf aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Analyse des Gesamtverlaufes?*

1.2.5 Wirkstoffkonzentration im Blut

Lösungskarte



Die Aufnahme des Wirkstoffes im Blut beginnt zu Beginn der Beobachtung. Nach 20 Stunden ist der Wirkstoff im Blut vollständig abgebaut. Nach etwa 6,7h ist die Konzentration des Wirkstoffes im Blut am höchsten. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut steigt zunächst steil an und fällt nach dem Maximum sanft ab.

1.2.5 Wirkstoffkonzentration im Blutt

1.2.6 Fußball

Situationsbeschreibung

Freistoß! Der 1.FC Süderbravo liegt mit 1:2 hinter den Sportfreunden Kiel zurück. Schafft der FC den Ausgleich?

Die Flugkurve des Balles wird von der ganzrationalen Funktion f beschrieben:

$$f(x) = -0{,}0015x^3 + 0{,}045x^2$$

(x: Entfernung in m; f: Höhe in m)

Die Mauer steht 12m vor dem Tor.

1.2.6 Fußball

Fakten, Fakten, Fakten

Maße eines Fußballtors:

Laut den Spielregeln des Weltfußballverbandes (FIFA) beträgt der Abstand zwischen den Innenkanten der Pfosten 7,32 m, die Unterkante der Querlatte ist 2,44 m vom Boden entfernt.

Regel für Freistöße:

Alle Spieler der verteidigenden Mannschaft (insbesondere die Mauer) müssen sich in einem Abstand von (mindestens) 9,15m zum Ball oder auf der eigenen Torlinie zwischen den Pfosten befinden.

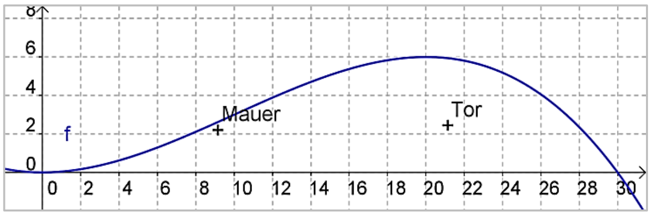
Hinweiskarte

- *Wie weit vom Tor entfernt steht der Schütze?*
- *Wo steht das Tor?*
- *Wie hoch ist eine Mauer?*
  Körpergröße eines durchschnittlichen Fußballspielers plus Sprunghöhe.
- *Wie hoch ist die Flugkurve des Balles auf Höhe der Mauer?*
  x-Wert für Mauer in die Funktion einsetzen. Ist $f(x) >$ Sprunghöhe eines Fußballers?
- *Wie hoch ist die Flugkurve des Balles auf Höhe des Tores?*
  x-Wert für das Tor in die Funktion einsetzen. Ist $f(x) < 2{,}44m$?

1.2.6 Fußball

Lösungskarte

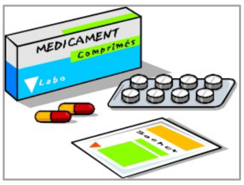
Der Schütze steht 21.15m vom Tor entfernt. Die Mauer ist ca. 2,20 hoch. Die Flughöhe des Balles auf Höhe der Mauer liegt bei $f(9{,}15) = 2{,}618m$. Damit fliegt der Ball über die Mauer. Auf Höhe des Tors beträgt die Flughöhe des Balles 5,84m und damit fliegt der Ball über das Tor. Mit diesem Freistoß schafft der FC Süderbravo den Ausgleich nicht.



1.2.6 Fußball

1.2.7 Kosten der Medikamentenproduktion

Situationsbeschreibung



Das Unternehmen Pharmatex stellt ein Medikament her, welches für 20 Euro pro Stück abgesetzt werden kann. Untersuchungen haben gezeigt, dass sich die Produktionskosten durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschreiben lassen:

$K(x) = x^3 - 10x^2 + 35x + 18$, wobei x: Menge der produzierten Medikamente in 1000 Mengeneinheiten.

Überprüfen Sie das Unternehmen auf seine Wirtschaftlichkeit.

1.2.7 Kosten der Medikamentenproduktion

Fakten, Fakten, Fakten

In der Kosten- und Leistungsrechnung bezeichnet der Gewinn (G) die Differenz zwischen dem Erlös (E) und den Kosten (K):

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

Hierbei gibt x die Anzahl der produzierten Güter an. Weiter gilt: $E(x) = p \cdot x$. Hier ist p der Preis eines Gutes.

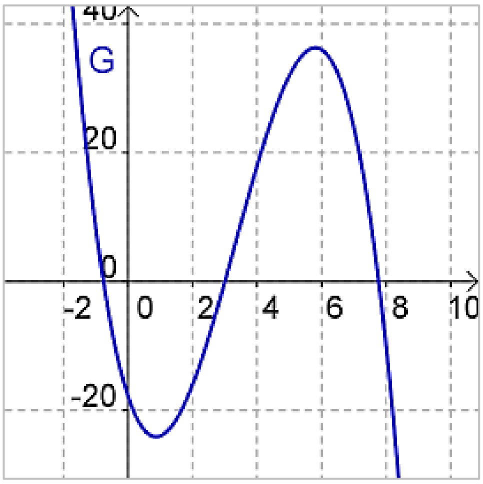
Hinweiskarte

- *Erlösfunktion?*
- *Gewinnfunktion?*
  $G(x) = E(x) - K(x)$
- *Für welche Stückzahl an verkauften Medikamenten macht das Unternehmen Gewinn?*
  Nullstellen der Funktion G berechnen und überprüfen, in welchem Intervall die Funktionswerte > 0 sind.
- *Skizze?*

1.2.7 Kosten der Medikamentenproduktion

Lösungskarte

Die Erlösfunktion lautet: $E(x) = 20x$. Damit lautet die Gewinnfunktion: $G(x) = -x^3 + 10x^2 - 15x - 18$. Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen bei $x_1 = -0{,}77 \wedge x_2 = 3 \wedge x_3 = 7{,}77$. Zwischen x_2 und x_3 sind die Funktionswerte größer als 0. Das bedeutet, dass das Unternehmen genau dann Gewinn macht, wenn es mehr als 3000 und weniger als 7770 Mengeneinheiten des Produktes verkauft.



1.2.7 Kosten der Medikamentenproduktion

1.2.8 Vehikel Verde

Situationsbeschreibung

Eine Firma produzierte einen besonders umweltfreundlichen PKW in geringer Stückzahl. Die Produktionskosten des Fahrzeugs in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x werden durch die ganzrationale Funktion K beschrieben:

$$K(x) = 5x^3 - 450x^2 + 16800x + 75000$$

Die Fahrzeuge werden zu einem Preis von 20300 Euro verkauft. Ein Unternehmensberater behauptet: „Mit diesem Gefährt können Sie keinen Gewinn erzielen!".

1.2.8 Vehikel Verde

Fakten, Fakten, Fakten

In der Kosten- und Leistungsrechnung bezeichnet der Gewinn (G) die Differenz zwischen dem Erlös (E) und den Kosten (K):

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

Hierbei gibt x die Anzahl der produzierten Güter an. Weiter gilt: $E(x) = p \cdot x$. Hier ist p der Preis eines Gutes.

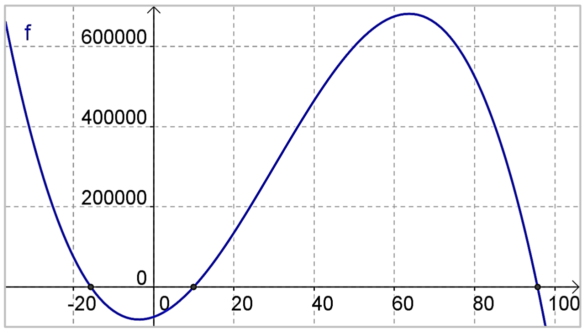
Hinweiskarte

- *Wie sieht die Erlösfunktion aus?*
  $E(x) = 20300 \cdot x$
- *In welchem Intervall ist die Gewinnfunktion größer als 0?*
  $G(x) = 0$ setzen und die Nullstellen mittels Polynomdivision bzw. Hornerschema berechnen. Das Verhalten im Unendlichen bzw. das Berechnen von Funktionswerten zwischen den Nullstellen gibt Aufschluss über den Verlauf des Graphen.
- *Skizze des Funktionsgraphen zeichnen.*
- *Rückschluss auf die Realsituation.*
  Wie viele Autos müssen mindestens bzw. dürfen höchstens verkauft werden, damit die Firma Gewinn macht?

1.2.8 Vehikel Verde

Lösungskarte

Es gilt: $G(x) = -5x^3 + 450x^2 + 3500x - 75000 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -15{,}68; x_2 = 10; x_3 = 95{,}68$. Zwischen $x_2 = 10\ und\ x_3 = 95{,}68$ verläuft der Graph der Funktion oberhalb der x-Achse. Damit macht die Firma Gewinn, sobald sie mehr als 10 aber weniger als 96 Fahrzeuge verkauft.



1.2.8 Vehikel Verde

1.2.9 Foto-Knips AG

Situationsbeschreibung

Die Foto-Knips AG möchte mit einer neuartigen Digitalkamera den Markt erobern. Die Kosten für die Produktion von x Kameras in einem Monat können durch eine ganzrationale Kostenfunktion beschrieben werden:
Eine fertige Kamera wird zum Preis von je 300 Euro an die jeweiligen Zwischenhändler verkauft.

Ein Unternehmensberater behauptet: „Mit diesem Produkt können Sie keinen Gewinn erzielen!“

Überprüfen Sie die Aussage des Unternehmensberaters durch eine mathematisch fundierte Analyse.

Fakten, Fakten, Fakten

In der Kosten- und Leistungsrechnung bezeichnet der Gewinn (G) die Differenz zwischen dem Erlös (E) und den Kosten (K):

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

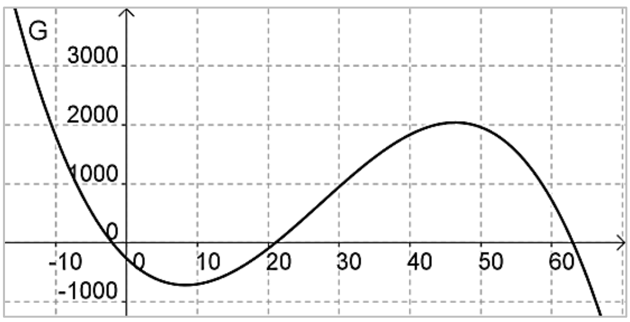
Hierbei gibt x die Anzahl der produzierten Güter an. Weiter gilt: $E(x) = p \cdot x$. Hier ist p der Preis eines Gutes.

Hinweiskarte

- *Wie sieht die Erlösfunktion aus?*
  $E(x) = 300 \cdot x$
- *In welchem Intervall ist die Gewinnfunktion größer als 0?*
  $G(x) = 0$ setzen und die Nullstellen mittels Polynomdivision bzw. Hornerschema berechnen. Das Verhalten im Unendlichen bzw. das Berechnen von Funktionswerten zwischen den Nullstellen gibt Aufschluss über den Verlauf des Graphen.
- *Skizze des Funktionsgraphen zeichnen.*
- *Rückschluss auf die Realsituation.*
  Wie viele Kameras müssen mindestens bzw. dürfen höchstens verkauft werden, damit die Firma Gewinn macht?

Lösungskarte

Es gilt: $G(x) = -0{,}1x^3 + 8{,}2x^2 - 115{,}5x - 264{,}6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2; x_2 = 21; x_3 = 63$. Die Gewinnfunktion ist für alle $x \in (21; 63)$ größer 0. Damit macht die Foto-Knips AG genau dann Gewinn, wenn sie mehr als 21, aber weniger als 63 Kameras verkauft.



1.3 Gebrochenrationale Funktionen

1.3.1 Benzinverbrauch[6]

Situationsbeschreibung

Der Benzinverbrauch eines gleichförmig fahrenden PKW hängt in erster Linie von der Geschwindigkeit ab. Die Funktion f beschreibt den Benzinverbrauch pro 100km eines Testfahrzeuges mit 60-Liter-Tank. Es gilt

$$f(x) = \frac{x^3 + 192000}{1600x} \quad mit \;\; 0 < x \leq 160$$

(Geschwindigkeit x in km/h, Benzinverbrauch $f(x)$ in l/100km).

Analysieren Sie den Verlauf der Verbrauchskurve und untersuchen Sie die maximal mögliche Reichweite des Fahrzeuges bei vollem Tank.

1.3.1 Benzinverbrauch

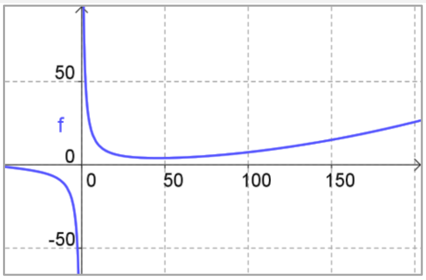
Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht der Funktionsgraph aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Bei welcher Geschwindigkeit ist der Benzinverbrauch minimal?*
  Annäherung mittels Wertetabelle.
- *Wie groß ist die Reichweite des PKW (in km) bei dieser Geschwindigkeit?*
  Über Dreisatz oder Herleitung einer Funktion, die die Reichweite des PKW in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit angibt.
- *Wie hoch ist der Benzinverbrauch bei* $x_1 = 25\frac{km}{h}$; $x_2 = 30\frac{km}{h}$; $x_3 = 50\frac{km}{h}$; $x_4 = 100\frac{km}{h}$?
  Einsetzen in die Funktionsgleichung von f.
- *Welche Strecke kann man mit einer Geschwindigkeit von* $80\frac{km}{h}$ *fahren?*
  Benzinverbrauch mit Funktion f berechnen; anschließend über Dreisatz die Strecke berechnen.

1.3.1 Benzinverbrauch

Lösungskarte



Bei einer Geschwindigkeit von 45 km/h ist der Benzinverbrauch mit 3,93 l/100km minimal. Bei konstantem Fahren mit dieser Geschwindigkeit beträgt die Reichweite des Fahrzeuges 1526,7km. Bei einer Geschwindigkeit von 80 km/h kann man eine Strecke von 1090,9km fahren.

1.3.1 Benzinverbrauch

[6] Idee: http://www.onlinemathe.de/forum/Gebrochenrationale-Funktion-Anwendungsaufgabe

1.3.2 Herstellungskosten eines Computers[7]

Situationsbeschreibung

Die Herstellungskosten eines Computers in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1100x + 48000}{2x + 3} \quad mit\ x \geq 0$$

Beschrieben (x: Stückzahl, $f(x)$: Herstellungskosten des x-ten Computers in Euro).

Analysieren Sie den Verlauf der Herstellungskosten. Geben Sie eine Empfehlung für einen Händler ab, der die Computer zum Herstellungspreis einkauft und für 640 Euro wieder verkauft.

1.3.2 Herstellungskosten eines Computers

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht der Verlauf der Herstellungskosten aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Wie hoch sind die Herstellungskosten eines Computers, wenn* $x_1 = 1000$ *bzw.* $x_2 = 10000$ *Stück produziert werden?*
  x_1 und x_2 in die Funktionsgleichung einsetzen.
- *Ab wann liegen die Herstellungskosten zum ersten Mal unter dem Verkaufspreis?*

1.3.2 Herstellungskosten eines Computers

Lösungskarte

1.3.2 Herstellungskosten eines Computers

[7] Idee: http://www.mathe-aufgaben.de

1.3.3 Wärmedämmung[8]

Situationsbeschreibung

Bei einer Wärmedämmschicht der Dicke d gilt für die jährlichen Heizkosten $h(d)$ pro m^2 Außenwand eines Hauses:

$$h(d) = \frac{18}{d+3} \quad (d \; in \; cm, h(d) in \; Euro).$$

Für das Anbringen der Dämmschicht mit Dicke d rechnet eine Firma pro m^2 mit Kosten von

$$k(d) = 10 + 3d \quad (d \; in \; cm; k(d) in \; Euro).$$

Analysieren Sie die Abhängigkeit der Heizkosten von der Dicke der Wärmedämmschicht. Geben Sie weiterhin eine mathematisch fundierte Einschätzung über die Heizkostenersparnis für ein durchschnittliches Einfamilienhaus an.

1.3.3 Wärmedämmung

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht der Verlauf der Heizkosten aus?* Skizze des Funktionsgraphen.
- *Bei welcher Dicke betragen die Heizkosten die Hälfte (ein Drittel; ein Viertel) der Heizkosten ohne Dämmschicht?* $h(0)$ berechnen; $h(d) = h(0) \cdot \frac{1}{2}$ nach d auflösen; $h(d) = h(0) \cdot \frac{1}{3}$ nach d auflösen; $h(d) = h(0) \cdot \frac{1}{4}$ nach d auflösen.
- *Wie groß ist die Dämmfläche eines durchschnittlichen Einfamilienhauses?* Einschätzungen abgeben; Analyse für drei verschiedene Dämmflächengrößen durchführen.

1.3.3 Wärmedämmung

Lösungskarte

1.3.3 Wärmedämmung

[8] Idee: http://www.mathe-aufgaben.de

1.3.4 Moselrundfahrt[9]

Situationsbeschreibung

Fährt ein Boot auf der Mosel mit Eigengeschwindigkeit v_B zunächst flussaufwärts gegen die Strömung mit der Geschwindigkeit v_s und danach flussabwärts dieselbe Strecke wieder zurück, so gilt für seine Durchschnittsgeschwindigkeit v_D:

$$v_D(v_B) = \frac{v_B^2 - v_S^2}{2 \cdot v_B}$$

Analysieren Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit. Gehen Sie dabei von einer Strömungsgeschwindigkeit von $v_S = 2m/s$ aus. Beurteilen Sie weiterhin auf der Grundlage Ihrer Analyse den Fahrplan der *Personenschifffahrt Gebr. Kolb*[10].

1.3.4 Moselrundfahrt

Fakten, Fakten, Fakten


Täglich! Panorama-Rundfahrten
ab Schiffsanlegestelle Trier-Zurlauben und Pfalzel.

Ab **01. Mai** bis einschließlich **31. Oktober**

Kleine Rundfahrt · 1 Stunde	Fahrpreis: **10,00 € ***
Große Rundfahrt · 2 Stunden	Fahrpreis: **14,00 € ***

Alle Abfahrten als große Rundfahrt buchbar (außer die jeweils letzte Abfahrtszeit). Ganzjährig Rundfahrten und Sonderabfahrtszeiten **für Gruppen nach Vereinbarung!**

Ab Schiffsanlegestelle **Trier-Zurlauben**

Täglich	10.00	11.15	12.30	13.45	15.00	16.15	17.30

Im April wochentags Abfahrten nur um **13.45 Uhr**, um **15.00 Uhr** und nach Voranmeldung für Gruppen.
An Wochenenden und Feiertagen gelten alle Abfahrten!

Ab Schiffsanlegestelle **Trier-Pfalzel** (Nach Voranmeldung!)

Täglich	10.30	13.00	15.30	18.00

Abbildung 1 Fahrplan Personenschifffahrt Gebr. Kolb

Hinweiskarte

- *Wie sieht ein sinnvoller Definitionsbereich für die Funktion aus?*
  Sinnvolle Werte für die Eigengeschwindigkeit des Bootes angeben.
- *Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches? Interpretation im Sachzusammenhang?*
- *Wie verläuft der Graph der Funktion v_D?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Wie weit ist es von der Anlegestelle Zurlaubener Ufer bis Pfalzel?*
  Internetrecherche oder Kartenmaterial.
- *Braucht man für diese Rundfahrt wirklich nur eine Stunde oder ist man länger/kürzer unterwegs?*

1.3.4 Moselrundfahrt

Lösungskarte

1.3.4 Moselrundfahrt

[9] Idee: http://www.feuerbachers-matheseite.de/AnalysisIII.htm
[10] http://moselrundfahrten.de/pdf/moselfahrplan_trier_2013.pdf

1.3.5 Linsengleichung[11]

Situationsbeschreibung

Aus der Linsengleichung folgt die Funktion $b(g)$, die jeder Gegenstandsweite ihre Bildweite zuordnet:

$$b(g) = \frac{g \cdot f}{g - f}$$

Führen Sie eine Funktionsuntersuchung für die Funktion b durch. Nehmen Sie hierfür an, dass $f = 5cm$ gilt. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

1.3.5 Linsengleichung

Fakten, Fakten, Fakten

Bei einer Abbildung durch eine dünne Linse der Brennweite f gilt die Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Dabei ist $g \geq 0$ der Abstand vom abzubildenden Gegenstand zur Linse (Gegenstandsbrennweite) und b der Abstand von der Linse zum (scharfen) Bild (Bildweite).

Hinweiskarte

- *Sinnvolle Definitionsmenge?*
- *Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches? Interpretation im Sachzusammenhang?*
- *Wie sieht der Verlauf der Funktion im Definitionsbereich aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Für welche Werte von g ist die Bildweite b negativ? Interpretation im Sachzusammenhang?*
- *Zwischen Gegenstand und Bild soll ein Abstand von 1m sein. Wie groß muss die Gegenstandsweite sein, damit ein scharfes Bild entsteht. Interpretation?*

1.3.5 Linsengleichung

Lösungskarte

1.3.5 Linsengleichung

[11] Idee: http://www.feuerbachers-matheseite.de/AnalysisIII.htm

1.3.6 Wirbelstrombremse

Situationsbeschreibung

Eine der größten Attraktionen des *Holidaypark Haßloch* ist der *Arnubis Free Fall Tower*. Um die Fahrerkabine des Towers abzubremsen wurde eine Wirbelstrombremse verbaut. Die Bremskraft B dieser Wirbelstrombremse kann als Funktion der Geschwindigkeit v mit Konstanten $a > 0$ und $b > 0$ wie folgt beschrieben werden:

$$B(v) = \frac{av}{b + v^2}$$

Analysieren Sie die Bremskraft dieser Wirbelstrombremse.

1.3.6 Wirbelstrombremse

Fakten, Fakten, Fakten

Mit einer Wirbelstrombremse kann man - wie der Name schon sagt - mit Hilfe von Wirbelströmen einen metallischen Gegenstand (z.B. eine Bremsscheibe) abbremsen, und zwar berührungslos und daher praktisch verschleißfrei.[12]

Hinweiskarte

- *Verhalten der Funktion für $v \to 0$ und für $v \to +\infty$? Interpretation im Sachzusammenhang.*

1.3.6 Wirbelstrombremse

Lösungskarte

1.3.6 Wirbelstrombremse

[12] Siehe: http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/physik/online_material/e_lehre_2/lenz/wirbelstrombremse.htm

1.3.7 Herstellungskosten AIRBUS-Seitenleitwerk

Situationsbeschreibung

Die Herstellungskosten eines AIRBUS-Seitenleitwerks aus Metall werden angenähert durch $K_1(x) = \frac{20x+5000}{x+50}$ (x: Anzahl der hergestellten Leitwerke; $K_1(x)$: Kosten in Geldeinheiten).

Nachdem 300 Leitwerke hergestellt worden sind, wird erwogen, die Produktion auf Kunststoffleitwerke umzustellen. Die Kosten betragen dann näherungsweise $K_2(x) = \frac{15x-2500}{x-250}$ $(x > 300)$.

Sprechen Sie eine fundierte, mathematisch begründete Empfehlung für oder gegen die Umstellung der Produktion aus.

1.3.7 Herstellungskosten AIRBUS-Seitenleitwerk

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Verlauf der Kosten bei der Verwendung von Metall.*
  Skizze von K_1 auf der Basis einer Kurvendiskussion (Nullstellen, Polstellen, Def.lücken,...).
- *Verlauf der Kosten bei der Verwendung von Kunststoff.*
  Skizze von K_2 auf der Basis einer Kurvendiskussion (Nullstellen, Polstellen, Def.lücken,...).
- *Beantwortung der Frage: Ab welcher Stückzahl lohnt sich die Umstellung auf Kunststoff?*
  Berechnung der Schnittpunkte von K_1 und K_2 und Identifikation des Intervalls, in dem die Kosten $K_2(x) < K_1(x)$ sind.

1.3.7 Herstellungskosten AIRBUS-Seitenleitwerk

Lösungskarte

1.3.7 Herstellungskosten AIRBUS-Seitenleitwerk

1.4 Exponentialfunktionen

1.4.1 Kondensator[13]

Situationsbeschreibung

Die untenstehende Tabelle gibt Messwerte für die Ladung Q auf einem Kondensator für verschiedene Zeitpunkte t während eines Entladungsprozesses an:

Zeit t in s	10	20	30	40
Ladung Q in 10^{-5}C	8088	6541	5290	4279

Analysieren Sie den Entladungsprozess des Kondensators.

1.4.1 Kondensator

Fakten, Fakten, Fakten

Ein Kondensator (von lateinisch condensare ‚verdichten') ist ein passives elektrisches Bauelement mit der Fähigkeit, elektrische Ladung und damit zusammenhängend Energie zu speichern. [14]

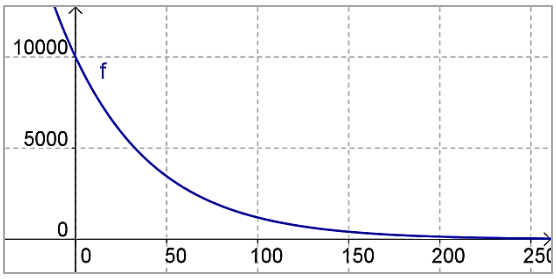
Hinweiskarte

- *Funktionsgleichung?*
  Funktionsgleichung mit Hilfe der Wertetabelle erstellen.
- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktion monoton wachsend oder fallend ist anhand der Funktionsgleichung.
- *Wie sieht die Spannungskurve aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen auf der Basis der Wertetabelle.
- *Wie hoch ist die Ladung zu Beginn des Entladungsprozesses?*
  $f(0)$ berechnnen.
- *Nach welcher Zeit hat sich die Ladung halbiert?*
  Halbwertszeit berechnen.
- *Nach welcher Zeit beträgt die Ladung nur noch 10% (1%) von der Ladung zu Beginn des Entladungsprozesses?*

1.4.1 Kondensator

Lösungskarte

Die Funktionsgleichung, die den Entladungsprozess beschreibt, lautet: $f(x) = 10000 \cdot 0{,}979^x$. Der Graph der Funktion ist streng monoton fallend. Zu Beginn des Entladungsprozesses liegt eine Ladung von 0,1 C vor. Nach jeweils 32,66 Sekunden hat sich die Ladung des Kondensators halbiert. Nach 108,49 Sekunden sind nur noch 10% der Ladung vorhanden, nach 216,98 Sekunden nur noch 1%.



1.4.1 Kondensator

[13] Idee: http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1fu/ef/ef_kondensator.pdf
[14] Siehe: http://de.wikipedia.org/wiki/Kondensator_%28Elektrotechnik%29

1.4.2 Lichtintensität[15]

Situationsbeschreibung

Im Meer oder in Seen verringert sich erfahrungsgemäß die Lichtintensität exponentiell. Die untenstehende Tabelle gibt Messwerte für die Lichtintensität I im Gardasee, dessen maximale Tiefe bei 346m liegt, für verschiedene Wassertiefen T an:

Wassertiefe T in m	1	2	3	4
Intensität I in Lux	3000	1800	1080	648

Analysieren Sie die Entwicklung der Lichtintensität bei zunehmender Wassertiefe.

1.4.2 Lichtintensität

Fakten, Fakten, Fakten

Verursacht durch das Wasser selbst und Schwebeteilchen nimmt die Lichtintensität in Gewässern bei zunehmender Wassertiefe ab.

Beispiele für Lichtintensitäten[16]:

- 5 mW Laserpointer, grün (532 nm), 3 mm Strahldurchmesser: 427.000 Lux
- Straßenbeleuchtung: 10 Lux
- Vollmondnacht: 0,25 Lux

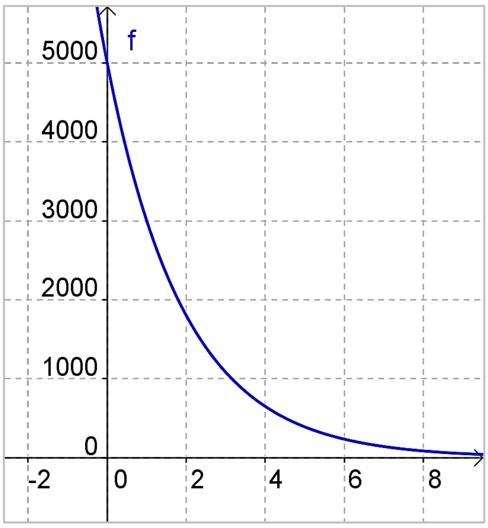
Hinweiskarte

- *Funktionsgleichung?*
  Funktionsgleichung mit Hilfe der Wertetabelle erstellen.
- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktion monoton wachsend oder fallend ist anhand der Funktionsgleichung.
- *Wie sieht der Verlauf der Lichtintensität aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen auf der Basis der Wertetabelle.
- *Wie hoch ist die Lichtintensität an der Wasseroberfläche?*
  $f(0)$ berechnnen.
- *Nach welcher Tiefe hat sich die Lichtintensität halbiert?*
  Halbwertstiefe berechnen.
- *Lichtintensität an der tiefsten Stelle?*
  $f(346)$ berechnen.

1.4.2 Lichtintensität

Lösungskarte

Die Funktionsgleichung für die Entwicklung der Lichtintensität lautet $f(x) = 5000 \cdot 0{,}6^x$ Die Funktion ist monoton fallend, d.h. die Intensität des Lichtes nimmt bei zunehmender Wassertiefe ab. An der Wasseroberfläche beträgt die Lichtintensität 5000 Lux. Nach jeweils 1,36m halbiert sich die Lichtintensität. Auf dem Grund des Gardasees liegt die Lichtintensität bei $8{,}7 \cdot 10^{-74}$ Lux.



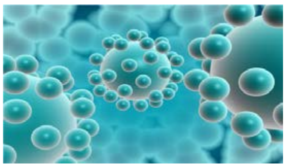
1.4.2 Lichtintensität

[15] Idee: http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1fu/ef/ef_lichtintensitaet.pdf
[16] http://de.wikipedia.org/wiki/Lux_%28Einheit%29

1.4.3 Bakterien

Situationsbeschreibung

Der Bestand von Bakterien entwickelt sich nach einer e-Funktion. $B(t)$ ist die Funktion, die den Bestand B der Bakterien zum Zeitpunkt t (in Stunden nach dem Beginn der Beobachtung) angibt.



$$B(t) = 100 \cdot e^{\frac{1}{5} \cdot t}$$

Analysieren Sie die Entwicklung der Bakterien.

1.4.3 Bakterien

Fakten, Fakten, Fakten

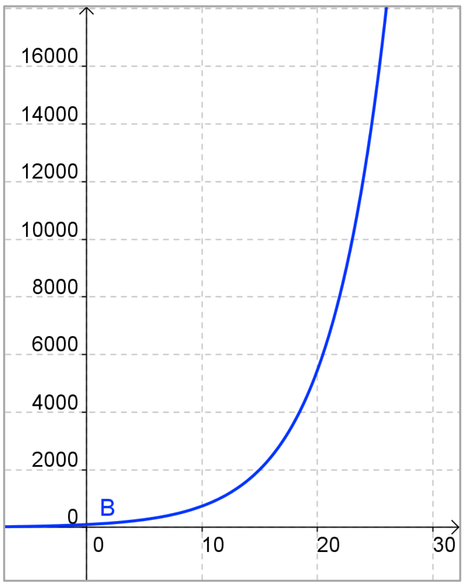
Hinweiskarte

- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktion monoton wachsend oder fallend ist anhand der Funktionsgleichung.
- *Wie groß ist der Anfangsbestand der Bakterien?*
  $B(0)$ berechnnen.
- *In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien?*
  Verdoppelungszeit berechnen.
- *Charakteristische Werte: Wann ist die Anzahl der Bakterien auf 1 Million gestiegen? Wie viele Bakterien sind es nach 24 Stunden?*
  $1\ Mio = B(t)$ nach t auflösen; B(24) berechnen.
- *Wie sieht der Verlauf des Bakterienwachstums aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen auf der Basis einer Wertetabelle.

1.4.3 Bakterien

Lösungskarte

Die Funktion ist monoton wachsend, d.h. die Bakterien vermehren sich. Zu Beginn der Beobachtung sind 100 Bakterien vorhanden. Nach 3,5 Stunden hat sich die Anzahl der Bakterien verdoppelt. Nach 46 Stunden ist die Anzahl der Bakterien auf eine Million angestiegen. Nach 4 Stunden sind es 12151 Bakterien.



1.4.3 Bakterien

1.4.4 Kaffee, Kaffee, Kaffee

Situationsbeschreibung

Die Temperaturkurve des Kaffees hier in Deutschland und die Temperaturkurve des Kaffees im Eishotel in Lappland wird durch zwei unterschiedliche Exponentialfunktionen beschrieben.

$\boldsymbol{T_1(t)}$ ist die Funktion, die die Temperatur $\boldsymbol{T_1}$ des Kaffees (in °C) **bei Dir zu Hause** zum Zeitpunkt **t** (in Minuten nach dem Einschenken) angibt:

$$T_1(t) = 21 + 59 \cdot e^{-0{,}13 \cdot t}$$

$\boldsymbol{T_2(t)}$ ist die Funktion, die die Temperatur $\boldsymbol{T_2}$ des Kaffees (in °C) **im Eishotel in Lappland** zum Zeitpunkt **t** (in Minuten nach dem Einschenken) angibt:

$$T_2(t) = -5 + 100 \cdot e^{-0{,}13 \cdot t}$$

Analysieren Sie die beiden Temperaturverläufe und geben Sie eine mathematisch fundierte Aussage ab, nach welcher Zeit man den Kaffee in beiden Fällen trinken kann.

1.4.4 Kaffee, Kaffee, Kaffee

Fakten, Fakten, Fakten

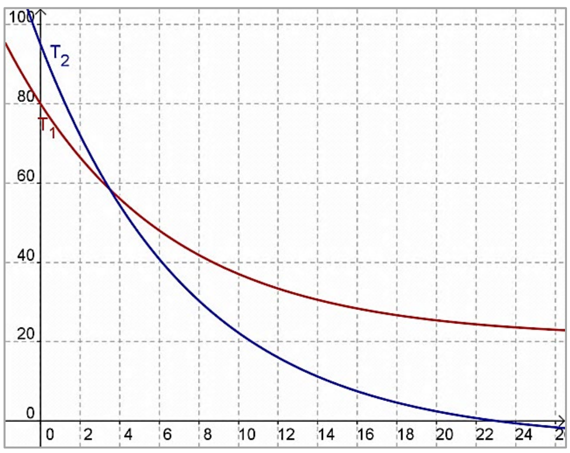
Hinweiskarte

- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktionen monoton wachsend oder fallend sind anhand der Funktionsgleichungen.
- *Anfangstemperatur des Kaffees hier und in Lappland?*
  $T_1(0)$; $T_2(0)$ berechnen.
- *Wann ist der Kaffee bei dir zu Hause/ in Lappland trinkbar (also bei etwa 40°C)?*
  $T_1(x) = 40$; $T_2(x) = 40$ nach x auflösen.
- *Verhalten der Funktionen im Unendlichen?*
  $\lim\limits_{t\to\infty} T_1(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} T_2(t)$ berechnen.
- *Nach welcher Zeit sind die beiden Kaffees gleich warm?*
  Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen berechnen.
- *Wie sieht der Verlauf der Temperaturkurven aus?*
  Skizze der Funktionsgraphen auf der Basis einer Wertetabelle.

1.4.4 Kaffee, Kaffee, Kaffee

Lösungskarte

Sowohl in Lappland, als auch hier, kühlt der Kaffee ab. In Lappland liegt die Anfangstemperatur des Kaffees bei 95°C, hier sind es 80°C. Der Kaffee in Lappland ist nach 6,14min trinkbar, während er hier 8,72min braucht, um auf 40°C abzukühlen. Nach 3,5min sind beide Kaffees mit 58,44°C gleich warm. Der Kaffee in Lappland kühlt schneller ab als hier in Deutschland, was an der in Lappland geringeren Umgebungstemperatur liegt. Für $x \to \infty$ strebt die Temperatur des Kaffees in Lappland gegen -5°C und hier gegen 21°C, was in beiden Fällen der jeweiligen Umgebungstemperatur entspricht.



1.4.4 Kaffee, Kaffee, Kaffee

1.4.5 Speicherkapazität[17]

Situationsbeschreibung

Die Speicherkapazität (Speicherdichte) moderner Computer (Zahl der Transistoren pro Flächeneinheit eines Silizium-Mikroprozessors) wird in bit/cm^2 bzw. $Gigabit/cm^2$ gemessen. Das berühmte Mooresche Gesetz besagt, dass sich diese Größe seit 1970 alle 18 Monate verdoppelt. 1970 betrug sie $10^{-6}\ Gigabit/cm^2$ ($= 1\ Kilobit/cm^2$).

Schätzen Sie den Wahrheitsgehalt dieser Aussage ein.

1.4.5 Speicherkapazität

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

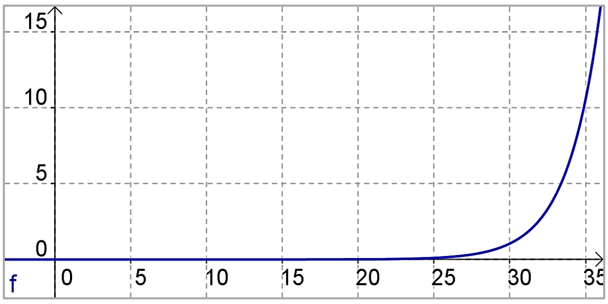
- *Wie groß ist die Speicherkapazität laut dem Mooreschen Gesetz heute?* Funktionsgleichung erstellen, die die Speicherkapazität bei der Eingabe der Jahre seit 1970 berechnet.

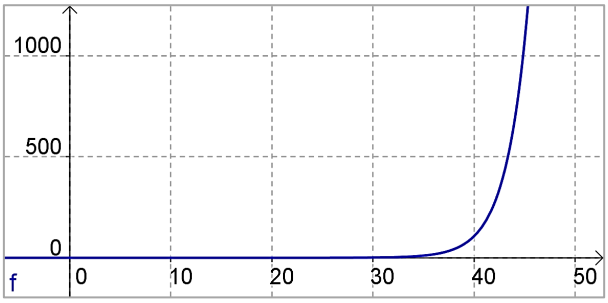
  $f(43)$ (für das Jahr 2013) berechnen.

1.4.5 Speicherkapazität

Lösungskarte

Die Funktion, die die Entwicklung der Speicherkapazität beschreibt, lautet: $f(x) = 10^{-6} \cdot \left(\sqrt[3]{4}\right)^x$. Im Jahr 2013 beträgt die Speicherkapazität somit $f(43) = 426{,}11\ Gigabit/cm^2$.





1.4.5 Speicherkapazität

[17] Idee: http://www.bkonzepte.de/mathe/texplogtech.pdf

1.4.6 Akkumulator[18]

Situationsbeschreibung

Ein Akkumulator ist nie vollständig aufgeladen. Für einen bestimmten vollständig entladenen Akkumulatortyp beschreibt die folgende Funktionsgleichung den Ladezustand in Prozent in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden):

$$f(x) = 100 \cdot (1 - 0{,}4^x)$$

Beschreiben Sie den Verlauf des Ladevorganges mit eigenen Worten auf Grund einer fundierten mathematischen Analyse des Ladevorganges.

1.4.6 Akkumulator

Fakten, Fakten, Fakten

Ein Akku bzw. Akkumulator (aus dem Lateinischen über cumulus = Haufen, (ad-)accumulare = anhäufen, Sammler, Plural: Akkus oder Akkumulatoren) ist ein wiederaufladbarer (englisch: rechargeable) Speicher für elektrische Energie auf elektrochemischer Basis.

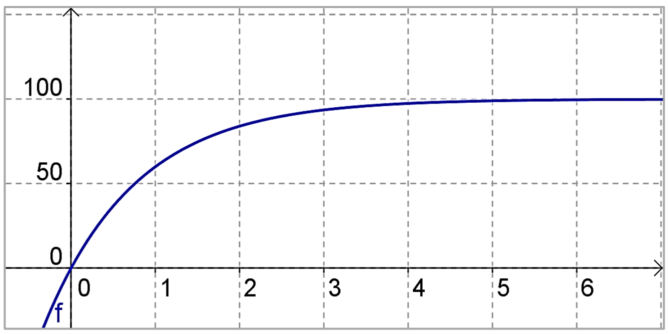
Hinweiskarte

- *Wann ist die Ladung bei 90%? Wann bei 95%?*
  $f(x) = 90$ *bzw.* $f(x) = 95$ nach x auflösen.
- *Skizze des Graphen*

1.4.6 Akkumulator

Lösungskarte

Nach 2,51 Stunden ist der Akkumulator zu 90% aufgeladen, nach 3,27 Stunden sind es 95%.



1.4.6 Akkumulator

[18] Idee: http://www.bkonzepte.de/mathe/texplogtech.pdf

1.4.7 Kochtopf auf Herdplatte[19]

Situationsbeschreibung

Die Erwärmung eines Kochtopfes auf einer Herdplatte kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$v(t) = 21 \cdot \left(\frac{30}{21}\right)^x$$

Dabei ist v die Temperatur in °C und t die Zeit in Minuten.

Für einen weiteren Herd mit Ceranfeld wurden bei wiederholter Messung 2 unterschiedliche Messpunkte festgestellt:

$$0min: 21°C\;;\;\; 1min: 60°C$$

Analysieren Sie die beiden Kochtopf-Herd-Kombinationen hinsichtlich ökologischer und ökonomischer Aspekte.

1.4.7 Kochtopf auf Herdplatte

Fakten, Fakten, Fakten

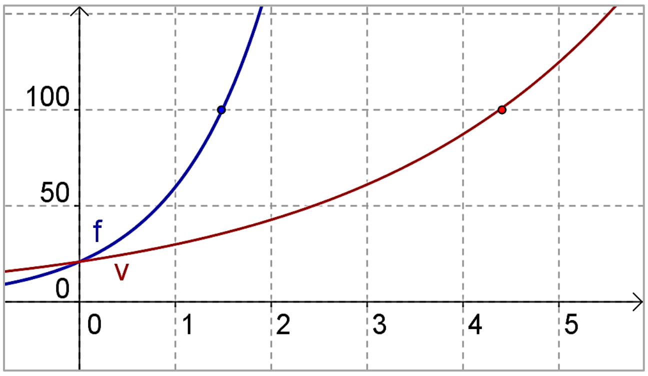
Hinweiskarte

- *Wie sieht die Funktion aus, die die Erwärmung des Topfes auf dem Ceranfeld beschreibt?*
  Aus den gegebenen Punkten die Funktionsgleichung herleiten.
- *Wann sind die beiden Töpfe gleich warm?*
  Schnittpunkt berechnen.
- *Welcher Topf erwärmt sich schneller auf 100°C?*
  Beide Gleichungen mit 100 gleichsetzen und nach x auflösen.
- *Skizze der beiden Graphen auf der Grundlage der vorher berechneten Werte.*

1.4.7 Kochtopf auf Herdplatte

Lösungskarte

Die Funktionsgleichung, die die Erwärmung des Topfes auf dem Ceranfeld beschreibt, lautet: $f(t) = 21 \cdot \left(\frac{60}{21}\right)^t$. Die beiden Töpfe besitzen zu Beginn der Beobachtung (t=0) die gleiche Temperatur von 21°C (Umgebungstemperatur). Der Topf auf der Herdplatte erwärmt sich innerhalb von 4,38 min auf 100°C, während der Topf auf dem Ceranfeld dafür nur 1,49 min braucht.



1.4.7 Kochtopf auf Herdplatte

[19] Idee: http://www.bkonzepte.de/mathe/texplogtech.pdf

1.4.8 Luftdruck[20]

Situationsbeschreibung

Der Luftdruck p nimmt mit wachsender Höhe über dem Meeresspiegel ab. Misst man den Luftdruck in hPa und die Höhe in km, so wird der Zusammenhang annähernd durch die Funktion $f(x) = 1013 \cdot 0{,}88^x$ beschrieben, wobei f den Luftdruck und x die Höhe in km angibt.

Analysieren Sie die Entwicklung des Luftdrucks bei der Besteigung des Kilimandscharo und berücksichtigen Sie dabei, dass ein Mensch einen Luftdruck von mindestens 483 hPa braucht, um dauerhaft zu existieren.

1.4.8 Luftdruck

Fakten, Fakten, Fakten

Der Kilimandscharo ist mit 5895 m Höhe über dem Meeresspiegel das höchste Bergmassiv Afrikas. Das Massiv im Nordosten von Tansania hat mit dem Kibo den höchsten Berg des afrikanischen Kontinents.

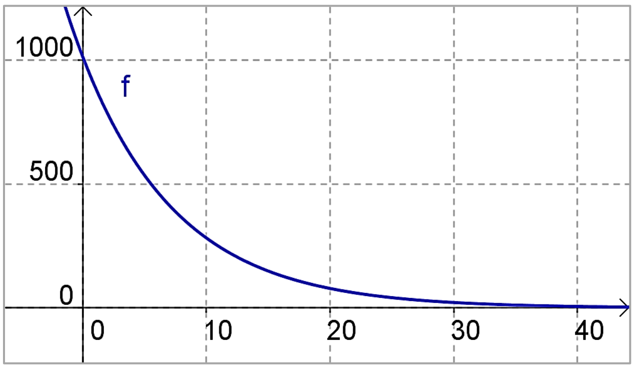
Hinweiskarte

- *Wie groß ist der Luftdruck auf NN?*
  $f(0)$ berechnen.
- *Halbierungshöhe?*
- *Wie hoch ist der Luftdruck auf dem Gipfel des Kilimandscharo?*
  $f(5895)$ berechnen.
- *In welcher Höhe herrscht ein Luftdruck von 483 hPa?*
  $f(x) = 483$ auflösen nach x.
- *Wie sieht der Verlauf des Luftdrucks aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen zeichnen.

1.4.8 Luftdruck

Lösungskarte

Auf einer Höhe von 0 m über NN liegt der Luftdruck bei 1013 hPa. Der Luftdruck halbiert sich jeweils nach einem Höhenzugewinn von 5,422 km. Auf dem Gipfel des Kilimandscharo herrscht ein Luftdruck von 476,8 hPa. Für einen Menschen ist das ist zu wenig Luftdruck, um dauerhaft zu existieren. Um einen Luftdruck von 483 hPa zu erreichen (um also dauerhaft zu existieren) muss man auf eine Höhe von 5794 m hinunter steigen.



1.4.8 Luftdruck

[20] Idee: http://www.bkonzepte.de/mathe/texplogtech.pdf

1.4.9 Kaninchenpopulation

Situationsbeschreibung

Das Wachstum einer Kaninchenpopulation kann durch die Funktion $f(t) = 100e^{0{,}35t}$ (t *in* Monaten) beschrieben werden. Eine andere Art von Kaninchen vermehrt sich nach der Funktion $g(t) = 200 \cdot 1{,}1^t$ $(t\ in\ Monaten)$.

Vergleichen Sie das Wachstum der beiden Populationen.

1.4.9 Kaninchenpopulation

Fakten, Fakten, Fakten

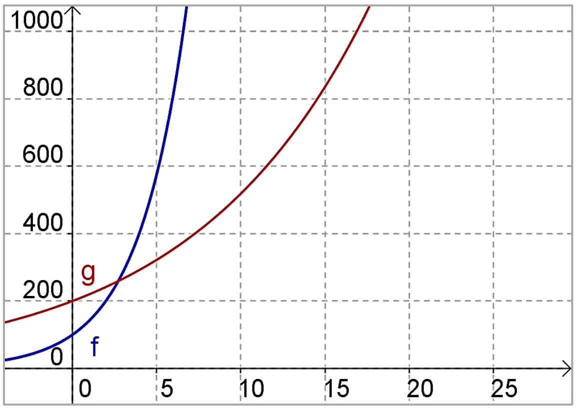
Hinweiskarte

- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktionen monoton wachsend oder fallend sind anhand der Funktionsgleichungen.
- *Wie sieht der Verlauf der Populationen aus?*
  Skizze der Funktionsgraphen auf der Basis einer Wertetabelle.
- *Anfangspopulationen?*
  $f(0)$; $g(0)$ berechnen.
- *Nach welcher Zeit sind die beiden Populationen gleich groß?*
  Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen berechnen.
- *Nach wie viel Tagen haben sich die Populationen verdoppelt?*
  Verdoppelungszeit berechnen.
- *Welche Population wächst schneller?*

1.4.9 Kaninchenpopulation

Lösungskarte

Beide Graphen sind streng monoton wachsend. Die Population f besteht zu Beginn aus 100 Kaninchen, die Population g aus 200 Kaninchen. Nach 2,72 Monaten haben beide Populationen gleich viele Kaninchen (nämlich jeweils 259 Stück). Die Verdoppelungszeit für Population f beträgt 1,98 Monate, während die Population g 7,27 Monate braucht um sich zu verdoppeln. Somit wächst Population f schneller.



1.4.9 Kaninchenpopulation

1.4.10 Falten bis zum Mond

Situationsbeschreibung

Ein $0{,}1mm$ dickes Blatt Papier wird immer wieder in der Mitte gefaltet. Wie oft müssen Sie das Blatt falten, damit der entstehende Papierturm bis zum Mond reicht?

1.4.10 Falten bis zum Mond

Fakten, Fakten, Fakten

Erde und Mond sind ca. $386000km$ voneinander entfernt.

Hinweiskarte

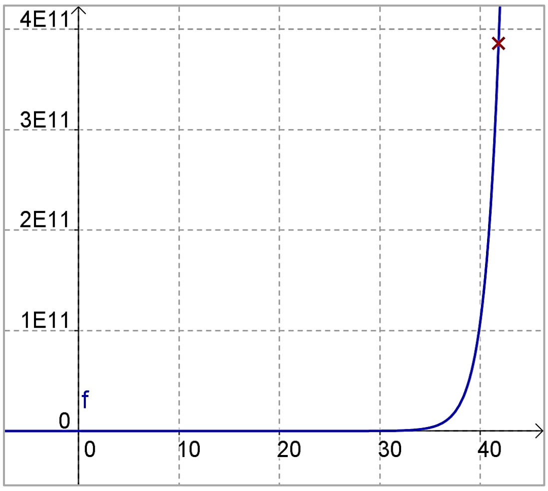
- *Vorgehensweise bei der Lösung der Aufgabe?*
  (Experimentelle) Herleitung der Exponentialfunktion, die die Höhe für eine Anzahl x an Faltvorgängen angibt.

  Setze diese Funktion gleich 386000 und löse nach x auf.

1.4.10 Falten bis zum Mond

Lösungskarte

Die Exponentialfunktion, die die Höhe des Papierturmes beschreibt, lautet: $f(x) = 0{,}1 \cdot 2^x$. Man muss ein 0,1mm dickes Blatt Papier 42mal falten, um die Entfernung Erde-Mond zu überwinden.



1.4.10 Falten bis zum Mond

1.4.11 Lungenvolumen

Situationsbeschreibung

Bei der Untersuchung der Lunge muss man vollständig ausatmen und danach 5 Sekunden lang so tief wie möglich einatmen.

Bei zwei verschiedenen Personen lässt sich das einatmen durch die folgende Funktionen beschreiben:

$$L_1(x) = 5 - 5e^{-x}$$

$$L_2(x) = 4 - 4e^{-2,5x}$$

Hierbei gilt: x ist die Zeit in Sekunden und $L(x)$ ist das Lungenvolumen in l.

Beschreiben und vergleichen Sie das jeweilige Einatmen. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

1.4.11 Lungenvolumen

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktionen monoton wachsend oder fallend sind anhand der Funktionsgleichungen.
- *Lungenvolumen zu Beginn?*
  $L_1(0)$ und $L_2(0)$ berechnen.
- *Wie verhält sich das Lungenvolumen in den ersten 5 Sekunden?*
  Wertetabelle und Skizze der Funktionsgraphen.
- *Wie verhält sich das Lungenvolumen für $x \to \infty$?*
  Momentanes Lungenvolumen strebt gegen das maximale Lungenvolumen (5 Liter für L_1 und 4 Liter für L_2).
- *Gibt es einen Schnittpunkt? Interpretation?*
  $L_1(x) = L_2(x)$ setzen und nach x auflösen.

1.4.11 Lungenvolumen

Lösungskarte

1.4.11 Lungenvolumen

1.4.12 Algenteppich

Situationsbeschreibung

Auf einem $150m^2$ großen See breiten sich Algen exponentiell aus. Zu Beginn der Beobachtung bedecken die Algen eine Fläche von $20m^2$. Nach einem Tag sind es $22{,}05m^2$.

Analysieren Sie das Algenwachstum und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

1.4.12 Algenteppich

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Funktionsgleichung?*
  Funktionsgleichung mit Hilfe der beiden im Aufgabentext gegebenen Wertepaare herleiten.
- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktion monoton wachsend oder fallend ist anhand der Funktionsgleichung.
- *Charakteristische Punkte; Verdoppelungszeit?*
  Funktionswerte für ausgesuchte x-Werte berechnen (z.B. $x_1 = 5$ und $x_2 = 10$).

  Verdoppelungszeit berechnen.
- *Wann ist der See komplett durch einen Algenteppich bedeckt?*
  $150 = f(x)$ setzen und nach x auflösen.
- *Wie sieht das Algenwachstum bis zur vollständigen Bedeckung des Sees aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.

1.4.12 Algenteppich

Lösungskarte

1.4.12 Algenteppich

1.4.13 Bienenvolk

Situationsbeschreibung

Ein Bienenstaat entwickelt sich exponentiell nach der Funktion:

$$f(x) = 40000 \cdot 0{,}8^x.$$

Hierbei ist x die Zeit in Wochen und $f(x)$ die Anzahl der Bienen des Bienenvolkes.

Analysieren Sie die Entwicklung des Bienenvolkes und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

1.4.13 Bienenvolk

Fakten, Fakten, Fakten

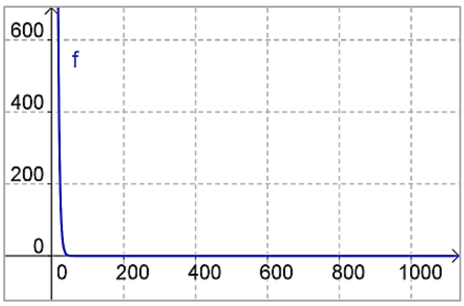
Hinweiskarte

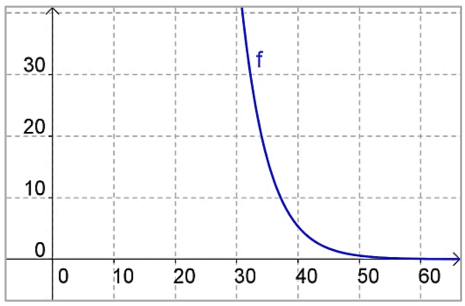
- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktion monoton wachsend oder fallend ist anhand der Funktionsgleichung.
- *Wie groß ist der Anfangsbestand?*
  $f(0)$ berechnen.
- *Halbwertszeit?*
  Halbwertszeit berechnen.
- *Charakteristische Punkte?*
  Realistische x-Werte einsetzen (z.B. $x_1 = 10$ und $x_2 = 52$) und zugehörige Größe des Bienenvolkes berechnen.
- *Wann ist nur noch eine Biene da?*
  $1 = f(x)$ setzen und nach x auflösen.
- *Wie sieht die Entwicklung des Bienenvolkes aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.

1.4.13 Bienenvolk

Lösungskarte

Die Funktion ist monoton fallend. D.h. die Anzahl der Bienen geht zurück. Grund dafür könnte eventuell eine Seuche oder zu kaltes Wetter sein. Zu Beginn der Beobachtung besteht das Bienenvolk aus 40000 Bienen. Nach 3,1 Wochen hat sich die Anzahl der Bienen halbiert. Nach 10 Wochen ist das Bienenvolk auf knapp 4295 Bienen geschrumpft. Nach einem halben Jahr (26 Wochen) sind es noch 120 Bienen. Nach 47,5 Wochen ist nur noch eine Biene da.





1.4.13 Bienenvolk

1.4.14 Heuschreckenplage

Situationsbeschreibung

15.03.2013 – NTV:

„Die Heuschreckenplage in Israel nimmt immer schlimmere Ausmaße an. Große Schwärme mit mehreren hundert Millionen der fliegenden Insekten sollen bislang von Ägypten nach Israel gekommen sein. Landwirte in der Negev-Wüste befürchten Millionenschäden durch die gefräßigen Tiere.“

Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt dieser Aussage. Gehen Sie davon aus, dass sich ein solcher Schwarm innerhalb von einer Woche verdoppelt. Am 18.01.2013 schätzten Biologen den Schwarm auf 10000 Tiere.

1.4.14 Heuschreckenplage

Fakten, Fakten, Fakten

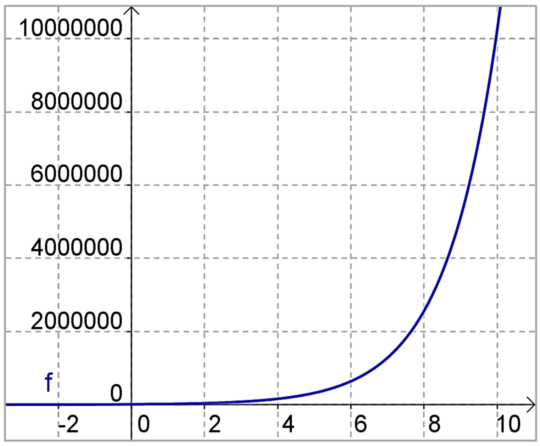
Hinweiskarte

- *Funktionsgleichung*
  Funktionsgleichung aus den im Text gegebenen Informationen herleiten.
- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktion monoton wachsend oder fallend ist anhand der Funktionsgleichung.
- *Charakteristische Punkte?*
  Größe des Schwarms nach 1 Woche und 1 Monat berechnen.
- *Wann ist der Schwarm auf 1Mio. Tiere angewachsen?*
  $1\,Mio = f(x)$ setzen und nach x auflösen.
- *Anzahl der Heuschrecken zum Zeitpunkt der Pressemeldung?*
  Zunächst Beantwortung der Frage: Wie viele Wochen sind seit Beginn der Beobachtung vergangen?
- *Wie sieht die Entwicklung des Heuschreckenschwarms aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.

1.4.14 Heuschreckenplage

Lösungskarte

Sei x die Anzahl der Wochen. Dann lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 10.000 \cdot 2^x$. Der Graph der Funktion ist monoton steigend, also vermehren sich die Heuschrecken. Nach einer Woche besteht der Schwarm aus 20.000 Heuschrecken, nach einem Monat sind es 160.000. Nach 6,64 Wochen besteht der Schwarm aus 1 Mio Tieren. Die Pressemeldung wird 8 Wochen nach Beginn der Beobachtung veröffentlicht. Zu diesem Zeitpunkt besteht der Schwarm aus 2.560.000 Tieren. Das sind nicht „mehrere Hundert Millionen“ Heuschrecken, wie es in der Pressemeldung behauptet wird.



1.4.14 Heuschreckenplage

1.4.15 Bank

Situationsbeschreibung

Ihre Großeltern schenken Ihnen zum 18. Geburtstag 800 Euro. Sie wollen das Geld möglichst gewinnbringend anlegen. Sie erhalten von zwei Bankberatern ein Angebot.

Berater A:

„Bei jährlicher Verzinsung werden aus Ihren 800 Euro nach einem Jahr 828 Euro, nach zwei Jahren sind es bereits 856,98 Euro.“

Berater B:

„Bei uns vermehrt sich Ihr Kapital nach der Formel $f(x) = 800 \cdot 1{,}028^x$, wobei x die Anzahl der Jahre bei jährlicher Verzinsung ist.“

Erstellen Sie eine mathematisch fundierte Analyse der beiden Angebote. Für welches Angebot entscheiden Sie sich und warum?

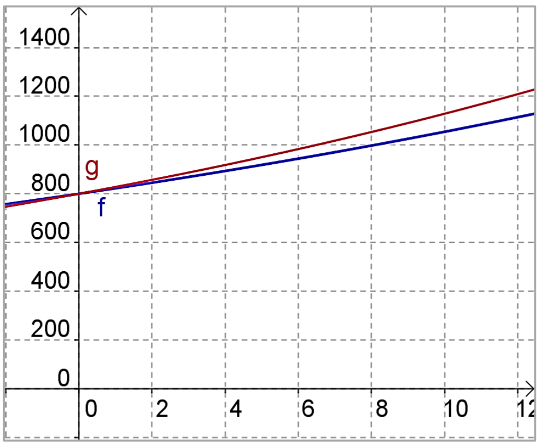
Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Funktionsgleichung*
  Funktionsgleichung für das Angebot von Berater A aus den im Text gegebenen Informationen herleiten.
- *Monotonie?*
  Entscheidung, ob die Funktionen monoton wachsend oder fallend sind anhand der Funktionsgleichung.
- *Charakteristische Punkte?*
  Jeweiliges Kapital nach 1, 2 und 3 Jahren.
- *Wie sieht der Verlauf der beiden Angebote aus?*
  Skizze der Funktionsgraphen.
- *Welches ist das bessere Angebot?*

Lösungskarte

Die Funktionsgleichung, die dem Angebot von Berater A zugrunde liegt lautet: $g(x) = 800 \cdot 1{,}035^x$. Beide Funktionen sind monoton wachsend, d.h. das Geld vermehrt sich. Bei Angebot A hat sich das Geld nach 1 Jahr auf 828, nach 2 Jahren auf 856,98 und nach 3 Jahren auf 886,97 Euro vermehrt. Bei Angebot B sind es 822,40 nach 1 Jahr, 845,43 nach 2 Jahren und 869,10 Euro nach 3 Jahren.



Die 800 Euro lege ich zu den Konditionen von Berater A an, da sich dort für mich eine bessere Rendite ergibt.

1.5 Trigonometrische Funktionen

2 Aufgabenbeispiele mit Differentialrechnung

2.1 Quadratische Funktionen

2.1.1 Olympische Verwirrung 2

Situationsbeschreibung

Nachdem bei den Olympischen Spielen in London beim Hammerwurf Wettbewerb der Damen die Weitenmessung versagte, analysierten Wissenschaftler der Sporthochschule in Köln den Wurf von Betty Heidler, der vom Kampfgericht zunächst mit einer Weite von 72,34m angegeben wurde. Die Wissenschaftler fanden heraus, dass die Funktion

$$f(x) = -0{,}015x^2 + 1{,}13x + 2{,}08$$

die Flugkurve von Betty Heidlers Hammer bei diesem Wurf beschreibt.

2.1.1 Olympische Verwirrung 2

Fakten, Fakten, Fakten

Kurz nach der Beendigung des olympischen Hammerwurffinales der Damen sah das Ergebnis folgendermaßen aus:

Gold gewann die Russin Tatjana Lysenko mit 78,18 Metern vor Anita Wlodarczyk aus Polen (77,60). Bronze sicherte sich zunächst Zhang Wenxiu aus China mit 76,34. Sie sollte es nicht behalten.[21]

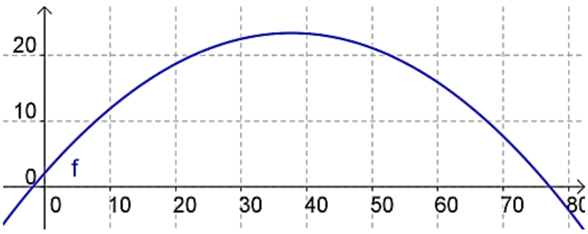
Hinweiskarte

- *Wie weit flog der Hammer von Betty Heidler wirklich?*
  Berechnung der Nullstellen.
- *Wie sieht die Flugkurve des Hammers aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Mit welchem Abwurfwinkel hat Betty Heidler den Hammer geworfen?*
  Tangentensteigung an $x = 0$.
- *Wo war der höchste Punkt der Flugkurve?*
  Hochpunkt

2.1.1 Olympische Verwirrung 2

Lösungskarte

Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x_1 = -1{,}8$ und $x_2 = 77{,}13$. Für die Realsituation spielt nur die positive Nullstelle eine Rolle. Betty Heidler gewann damit Bronze in diesem olympischen Finale. Der Abwurfwinkel lag bei 48,49°. Der höchste Punkt der Flugkurve lag im Punkt P(37,67 | 23,36).



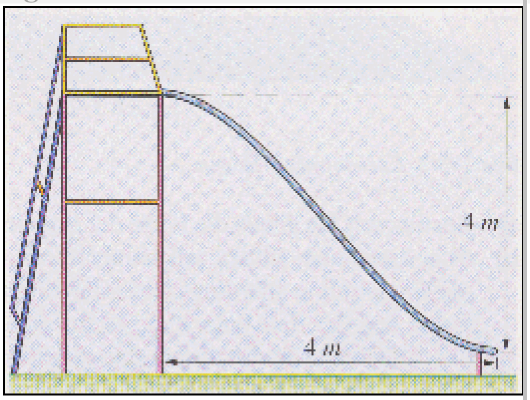
2.1.1 Olympische Verwirrung 2

[21] Siehe: http://www.welt.de/sport/olympia/article108572700/Hammerwurf-Skandal-Doch-noch-Bronze-fuer-Heidler.html (Zugriff: 20.10.2012)

2.2 Ganzrationale Funktionen

2.2.1 Rutsche[22]

Situationsbeschreibung



Ein Spielgerätefabrikant plant die Konstruktion einer Rutsche für Kinderspielplätze. Das seitliche Profil der Rutsche wird durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben. Die Rutsche wird durch die Extremalpunkte der Funktion begrenzt.

Analysieren Sie den Verlauf der Rutsche unter Berücksichtigung der TÜV-Anforderung, dass eine Rutsche an keiner Stelle steiler als 50° gegen die Horizontale sein darf. Geben Sie auf der Basis Ihrer Berechnungen eine Empfehlung für oder gegen den Bau der Rutsche ab.

2.2.1 Rutsche

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht die Funktionsgleichung aus?*
  Lineares Gleichungssystem mit Hilfe folgender Bedingungen aufstellen: Schnittpunkt mit der y-Achse bei $x = 4$; Maximum bei $x = 0$; Minimum bei $x = 4$.
- *An welcher Stelle hat die Rutsche maximales Gefälle?*
  Maximum der ersten Ableitung bestimmen. Steigunswert an dieser Stelle berechnen und mittels Arcustangens umrechnen in Prozentwert.
- *Erfüllt die geplante Rutsche die TÜV-Anforderung?*
  Nein, die Rutsche ist zu steil, deshalb muss eine Empfehlung gegen den Bau der Rutsche ausgesprochen werden.

2.2.1 Rutsche

Lösungskarte

2.2.1 Rutsche

[22] Idee: http://www.nb-braun.de/mathematik/Steckbrief2/bausteine/bst2-5-rutsche.htm

2.2.2 Bergwanderung

Situationsbeschreibung

Ein Wanderer steigt auf einen Berg, dessen Silhouette durch $f(x) = 0{,}038x^2 - 0{,}004x^3$ (Angaben in km) gegeben ist.

Analysieren Sie das Höhenprofil (vollständige Kurvendiskussion, ohne Symmetriebetrachtung) und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie breit ist der Querschnitt der Silhouette?*
  Nullstellen und Entfernung zwischen den Nullstellen berechnen.
- *Wie hoch ist der Berg?*
  Hochpunkt berechnen.
- *Wo liegt der steilste Punkt des Berges?*
  Wendepunkt berechnen.
- *Wie groß ist der Steigungswinkel in der steilsten Stelle?*

Lösungskarte

2.2.3 EHEC-Erkrankung

Situationsbeschreibung	*Fakten, Fakten, Fakten*
Das Robert-Koch-Institut in Berlin hat den Verlauf der Darmerkrankung EHEC untersucht. Die Zahl der Erkrankten kann näherungsweise durch die folgende Funktionsgleichung dargestellt werden: $$f(x) = -\frac{1}{250}x^3 + \frac{1}{10}x^2$$ Die Erfassung der Erkrankten beginnt zum Zeitpunkt $x = 0$, wobei x die Zeit in Tagen ist. Es wird nur das Intervall betrachtet, auf dem $f(x) \geq 0$ ist.	

Hinweiskarte	*Lösungskarte*
• *Wann ist die Höchstzahl der Erkrankten erreicht und wie viele Menschen sind zu diesem Zeitpunkt erkrankt?* Hochpunkt berechnen. • *An welchem Tag kommen die meisten Neuerkrankten dazu?* Wendepunkt berechnen. • *Wann ist die Erkrankung vorbei?* Nullstellen berechnen.	

2.2.4 Laktatkonzentration

Situationsbeschreibung

Um den Trainingszustand eines Sportlers zu ermitteln, misst man die Laktatkonzentration (den Milchsäureanteil) im Blut.

Der Laktatwert nimmt bei intensiver Belastung zu, da ab einem gewissen Punkt die Energieversorgung ohne Sauerstoff vollzogen wird (anaerobe Schwelle). Je niedriger der Laktatwert bei einer bestimmten Laufgeschwindigkeit ist, desto besser ist der Trainingszustand des Sportlers.

Bei einer Läuferin A wird diese Untersuchung durchgeführt und es ergibt sich aus den Messwerten eine Laktatkurve, die im Intervall $[8;18]$ annähernd beschrieben wird durch die folgende Funktion:

$$L_A(v) = 0{,}04v^3 - 1{,}29v^2 + 13{,}5v - 43$$

Eine Läuferin B mit identischen Voraussetzungen wird ebenfalls der gleichen Untersuchung unterzogen und es ergibt sich für die Laktatwerte die folgende Funktion:

$$L_B(v) = \frac{1}{32}v^3 - \frac{15}{16}v^2 + 9v - \frac{123}{5}$$

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

Lösungskarte

2.3 Gebrochenrationale Funktionen

2.3.1 Dünger[23]

Situationsbeschreibung

Einer der wichtigsten Nährstoffe für Pflanzen ist Stickstoff. Er wird den Pflanzen (neben dem schon im Boden vorhandenen Stichstoff) in Form von Dünger zugegeben. Wissenschaftler fanden heraus, dass der zusätzliche Getreideertrag $f(x)$ (in 100 kg/ha) aufgrund der Zugabe von Dünger sich wie folgt darstellen lässt:

$$f(x) = \frac{a \cdot x}{x^2 + b} \quad mit\ x \geq 0$$

Für f gilt dabei $f(100) = 25$ und $f(600) = 20$.

Was würden Sie einem Ökonom für die Zugabe von Dünger empfehlen?

2.3.1 Dünger

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Wie sieht die Entwicklung des zusätzlichen Getreideertrages aus?*
  Skizze des Funktionsgraphen.
- *Wie viel Dünger muss hinzugegeben werden, um einen größtmöglichen zusätzlichen Getreideertrag zu erzielen?*
  Maximum der Funktion f bestimmen.

2.3.1 Dünger

Lösungskarte

2.3.1 Dünger

2.4 Exponentialfunktionen

2.5 Trigonometrische Funktionen

3 Aufgabenbeispiele mit Differential- und Integralrechnung

3.1 Quadratische Funktionen

[23] Idee: http://www.schoolwork.de/forum/mathematik/anwendungsaufgabe-einer-gebrochenrationale-funktion-t13129/

3.2 Ganzrationale Funktionen

3.2.1 Wasserrutsche

Situationsbeschreibung

Der Verlauf einer geplanten Wasserrutsche wird durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben. Am Einstieg ist die Rutsche 3,20m hoch. Nach 4m (Luftlinie) landet man im Wasser (doppelte Nullstelle). Die steilste Stelle der Rutsche befindet sich genau in der Mitte der Horizontalen.

Die 1,20m breite Rutsche soll mit Beton unterfüttert werden. Geben Sie eine mathematisch begründete Einschätzung für den Betonverbrauch für die Unterfütterung der Rutsche ab.

3.2.1 Wasserrutsche

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

- *Funktionsgleichung?*
  $P_1(0\,|\,3{,}2) \in f$; $P_2(4\,|0) \in f$ und bei $x = 2$ befindet sich eine Wendestelle.

  Lineares Gleichungssystem aufstellen und nach den Koeffizienten des Polynoms auflösen.
- *Definitionsbereich (Beginn und Ende der Rutsche)?*
  Beginn bei $x = 0$; Ende bei $x = 4$.
- *Frontfläche der Betonwand?*
  Integral über den Definitionsbereich.
- *Materialverbrauch?*
  Frontfläche mal 1,20m.

3.2.1 Wasserrutsche

Lösungskarte

3.2.1 Wasserrutsche

3.3 Gebrochenrationale Funktionen

3.4 Exponentialfunktionen

3.5 Trigonometrische Funktionen

Situationsbeschreibung

Fakten, Fakten, Fakten

Hinweiskarte

Lösungskarte